Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

SS 2008, Blatt 1

Aufgabe 1. (a) Sei $\Sigma = \{a_0, \ldots, a_4\}$ ein Alphabet mit paarweise verschiedenen $a_0, \ldots, a_4$. Wie viele Wörter der Länge 3 gibt es über Σ? Wie viele der Länge n für $n \in \mathbb{N}$? Wie viele Wörter der Länge n gibt es, wenn Σ genau k Buchstaben enthält?

(b) Sei $\Sigma = \{a_0, \ldots, a_8\}$ ein Alphabet mit paarweise verschiedenen $a_0, \ldots, a_8$. Ordnen Sie die folgenden Wörter bezüglich $\leq_d$ und bezüglich $\leq_{lex}$:

$$a_4a_0a_1a_3,\ \ a_3a_2,\ \ a_1a_7a_4,\ \ a_2a_1a_6,\ \ a_1a_7a_1a_2a_3,\ \ a_7$$

Dabei bezeichne $\leq_d$ die Ordnung auf Σ^*, welche der Ordnung im Lexikon entspricht (bzgl. $(a_0, \ldots, a_n)$), und $\leq_{lex}$ die lexikographische Ordnung auf Σ^* (bzgl. $(a_0, \ldots, a_n)$).

Aufgabe 2. $\Sigma = \{a_0, \ldots, a_n\}$ sei ein Alphabet mit paarweise verschiedenen $a_0, \ldots, a_n$ $(n \geq 1)$. Ferner seien $\leq_d$ und $\leq_{lex}$ wie in Aufgabe 1.

(a) Geben Sie eine bezüglich $\leq_d$ unendliche absteigende Folge von Wörtern $(w_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma^*$ an, das heißt eine Folge $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit

$$\ldots \lneq_d w_2 \lneq_d w_1 \lneq_d w_0 \ .$$

(b) Bestimmen Sie alle Wörter $w \in \Sigma^*$, für die die Menge $\{v \mid v \leq_d w\}$ unendlich ist.

(c) Zeigen Sie, daß für alle $w \in \Sigma^*$ die Menge $\{v \mid v \leq_{lex} w\}$ endlich ist.

Aufgabe 3. Nehmen Sie an, daß Ihr Computer zur Durchführung eines Rechenschritts 10^{-9} Sekunden benötigt. Berechnen Sie seine Laufzeit für je einen Algorithmus, der n, n^3 bzw. 2^n Rechenschritte benötigt, für $n = 10, 30$ und 70. Wählen Sie für die Antwort eine informative Maßeinheit (Sekunden, Minuten, Tage, Jahre,...).

Aufgabe 4. (a) Die Goldbachsche Vermutung besagt, daß jede gerade natürliche Zahl größer 2 Summe zweier Primzahlen ist. Halten Sie es für möglich, daß diese Vermutung wahr, jedoch nicht beweisbar ist?

(b) Die Kontinuumshypothese besagt, daß es für jede nichtleere Teilmenge X der reellen Zahlen entweder eine Surjektion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ oder eine Surjektion $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ gibt. Halten

Sie es für möglich, daß die Kontinuumshypothese weder bewiesen noch widerlegt werden kann?

Aufgabe 5. Für eine Menge M bezeichne $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Geben Sie eine injektive Funktion $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ an. Folgern Sie, daß $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

Aufgabe 6. $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$ seien Alphabete ($r \geq 1$) und $W \subseteq \Sigma_1^* \times \cdots \times \Sigma_r^*$. Definieren Sie, was es heißt, daß W entscheidbar ist.

Abgabe: Mittwoch, 30. April 2008, vor der Vorlesung.