Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

SS 2008, Blatt 11

Aufgabe 52. (a) Es sei S beliebig. Geben Sie einen L_{II}^S-Satz φ an, sodaß

$$\mathrm{Mod}(\varphi) = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \ S\text{-Struktur, } A \text{ endlich, } |A| \text{ gerade}\}.$$

(b) Seien X und Y einstellige Relationsvariablen. Gebe Sie einen $L_{\mathrm{M\,II}}^{S_{\mathrm{Grp}}}$-Ausdruck $\varphi(X,Y)$ mit freien Variablen X, Y an, sodaß für alle Gruppen $\mathfrak{G}$ und alle $M, U \subseteq G$ gilt:
$\mathfrak{G} \models \varphi[M,U]$ genau dann, wenn U der Träger der von M erzeugten Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist.
($\mathfrak{G} \models \varphi[M,U]$ bedeutet $(\mathfrak{G},\gamma) \models \varphi$ mit $\gamma(X) = M$ und $\gamma(Y) = U$).

Aufgabe 53. Sei S höchstens abzählbar und $T \subseteq L_0^S$ eine Theorie, die nur unendliche Modelle besitzt (insbesondere hat T also ein abzählbares Modell). Weiterhin seien alle abzählbaren Modelle von T paarweise isomorph. Zeigen Sie, daß T vollständig ist.

Aufgabe 54. Sei T eine Theorie, Φ R-aufzählbar und $T = \Phi^{\models}$. Zeigen Sie, daß T bereits R-axiomatisierbar ist.

Aufgabe 55. Für eine Symbolmenge S sei

$$\Phi_e^S = \{\varphi \in L_0^S \mid \varphi \text{ ist im Endlichen erfüllbar}\}.$$

Zeigen Sie für $S = \{E\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol E, daß Φ_e^S R-aufzählbar ist. Ist auch $\Phi_e^{S_\infty}$ R-aufzählbar? Zeigen Sie, daß $\Phi_e^{S_\infty}$ nicht R-entscheidbar ist.

Aufgabe 56. Sei S endlich und $\varphi = \exists X_1 \ldots \exists X_m \psi$ ein fester L_{II}^S-Satz, wobei $X_1, \ldots, X_m$ Relationsvariablen beliebiger Stellenzahl sind und ψ keine Quantoren zweiter Stufe enthält. Zeigen Sie: Es gibt ein NPTIME-Verfahren, das angesetzt auf eine endliche S-Struktur $\underline{\underline{\mathfrak{A}}}$, deren Träger die Gestalt $[n]$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ hat, entscheidet, ob $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 50.

Abgabe: Mittwoch, 16. Juli 2008, vor der Vorlesung.