

Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

SS 2008, Blatt 2

Aufgabe 7. Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie ein R-Programm an, das die Menge

$$\{x \in \Sigma^* \mid x \text{ enthält keine 2 benachbarten } a \\ \text{oder } x \text{ enthält keine 2 benachbarten } b\}$$

entscheidet.

Aufgabe 8. Sei Σ ein Alphabet und $W \subseteq \Sigma^*$ eine nichtleere Wortmenge über Σ . Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

- (i) W ist R-aufzählbar.
- (ii) Es gibt eine berechenbare Funktion f mit $\text{df}(f) = W$ und $\text{bd}(f) \subseteq \Sigma^*$.
- (iii) Es gibt eine berechenbare Funktion f mit $\text{df}(f) = \Sigma^*$ und $\text{bd}(f) = W$.

Aufgabe 9. Sei Σ ein Alphabet und $W \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, daß W genau dann R-entscheidbar ist, wenn es ein Aufzählungsverfahren P für W gibt, welches die Elemente von W ohne Wiederholungen in lexikographischer Reihenfolge ausgibt.

Aufgabe 10. Seien Σ_1 und Σ_2 Alphabete und $W_1 \subseteq \Sigma_1^*, W_2 \subseteq \Sigma_2^*$. W_1 heißt *auf* W_2 (*many-one-*) *reduzierbar* (in Notation $W_1 \leq_m W_2$), wenn es eine R-berechenbare Abbildung $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ gibt, sodaß für alle $x \in \Sigma_1^*$:

$$x \in W_1 \iff f(x) \in W_2.$$

Ein solches f ist eine *Reduktion von* W_1 *auf* W_2 . Zeigen Sie:

1. Ist $W_1 \leq_m W_2$ und W_2 R-entscheidbar, so ist auch W_1 R-entscheidbar.
2. Ist $W_1 \leq_m W_2$ und W_2 R-aufzählbar, so ist auch W_1 R-aufzählbar.

Wurde in der Vorlesung bereits eine Reduktion (implizit) angegeben?

Aufgabe 11. a) Sei $\Sigma = \{a_0, \dots, a_m\}$. Zu $W \subseteq \Sigma^*$ sei

$$\chi_W : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \text{ mit } \chi_W(x) = \begin{cases} \lambda & , x \in W \\ a_0 & , x \notin W \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion von W* . Zeigen Sie, daß W genau dann R-entscheidbar ist, wenn χ_W berechenbar ist.

b) Für eine Funktion f mit $\text{df}(f), \text{bd}(f) \subseteq \Sigma^*$ sei

$$G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in \text{df}(f)\}$$

der *Graph von f* . Zeigen Sie, daß G_f genau dann R-aufzählbar ist, wenn f berechenbar ist.

Abgabe: Mittwoch, 7. Mai 2008, vor der Vorlesung.