Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

SS 2008, Blatt 3

Aufgabe 7. Aus der Vorlesung wissen wir, daß die Menge aller Wörter über einem Alphabet Σ in der lexikographischen Ordnung R-aufzählbar sind. Sei $r \geq 1$; geben Sie eine Ordnung auf der Menge $(\Sigma^*)^r$ an, in der diese Menge R-aufzählbar ist.

Aufgabe 8. Sei f berechenbar mit $\mathrm{df}(f) \subseteq \mathbb{N}$ und $\mathrm{bd}(f) \subseteq \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
a) Falls f injektiv ist, so ist f^{-1} berechenbar.
b) Falls f monoton ist, so ist $\mathrm{bd}(f)$ entscheidbar. (Dabei heißt f *monoton*, falls $f(k) \leq f(l)$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k < l$.)

Aufgabe 9.

Are we not drawn onward, we few, drawn onward to new era

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Für ein Wort $w = a_1 \dots a_{|w|} \in \Sigma^*$ sei $w^{-1} = a_{|w|} \dots a_1$. Ein Wort $w \in \Sigma^*$ ist ein *Palindrom* gdw. $w = w^{-1}$. Geben Sie ein nichtdeterministisches R-Programm an, das die Menge der Palindrome in Σ^* entscheidet.

Aufgabe 10. Seien Σ und Π Alphabete und $V \subseteq (\Sigma^*)^r, W \subseteq (\Pi^*)^s$ mit $r, s \geq 1$.
V heißt *auf W polynomiell reduzierbar* ($V \leq_p W$) gdw. es PTIME - Funktionen $f_1, \dots, f_s$ von $(\Sigma^*)^r$ nach Π^* gibt, sodaß für alle r-Tupel $\bar{x} \in (\Sigma^*)^r$ gilt:

$$\bar{x} \in V \iff (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_s(\bar{x})) \in W.$$

Sei Γ ein weiteres Alphabet und $U \subseteq (\Gamma^*)^t$ für ein $t \geq 1$. Zeigen Sie:

1. Ist $U \leq_p V$ und $V \leq_p W$, so ist $U \leq_p W$.
2. Ist $V \leq_p W$ und $W \in$ PTIME, so ist $V \in$ PTIME.
3. Ist $V \leq_p W$ und $W \in$ NPTIME, so ist $V \in$ NPTIME.

$W \subseteq (\Pi^*)^s$ heißt NP-*vollständig* gdw. $W \in$ NPTIME und für alle $V \in$ NP gilt $V \leq_p W$. Folgern Sie:

$$\text{PTIME} = \text{NPTIME} \iff W \in \text{PTIME}.$$

Aufgabe 11. Sei $W \subseteq \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a, b \geq 2$. Zeigen Sie für $W_a := \{[n]_a \mid n \in W\}$ und $W_b := \{[n]_b \mid n \in W\}$, daß $W_a \in$ PTIME gdw. $W_b \in$ PTIME.

Abgabe: Mittwoch, 21. Mai 2008, vor der Vorlesung.