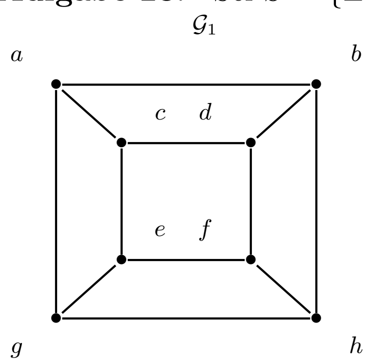
Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

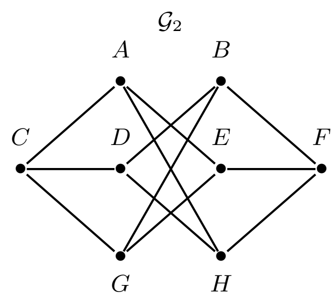
SS 2008, Blatt 6

Aufgabe 27. Sei $S = \{+, \cdot, 0, 1, \leq, f, d\}$, wobei die Funktionssymbole f und d ein- und zweistellig sind. Sei $\mathfrak{R}$ eine S-Struktur mit Träger $\mathbb{R}$, in der $+, \cdot, 0, 1$ und $\leq$ wie üblich interpretiert sind, $f^{\mathfrak{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $d^{\mathfrak{R}}$ die Abstandsfunktion ist, d.h. $d^{\mathfrak{R}}(r, r') = |r - r'|$ für alle $r, r' \in \mathbb{R}$. Symbolisieren Sie:

1. $f^{\mathfrak{R}}$ ist gleichmässig stetig.
2. $f^{\mathfrak{R}}$ ist differenzierbar.
3. Wenn $f^{\mathfrak{R}}$ streng monoton ist, dann ist $f^{\mathfrak{R}}$ injektiv.

Aufgabe 28. Sei $S = \{E\}$ mit zweistelligem E; $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ seien die Graphen:





a) Die Graphen $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ sind isomorph. Geben Sie einen Isomorphismus an.

b) Prüfen Sie, ob $\mathcal{G}_i \models \varphi_j$ für $i \in \{1, 2\}$ und $j \in \{1, 2, 3\}$, wobei

$$\varphi_1 = \exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$$
$$\varphi_2 = \forall x \forall y (\neg Exy \to \exists z (Exz \wedge Ezy))$$
$$\varphi_3 = \forall x \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \exists y_4 (Exy_1 \wedge Exy_2 \wedge Exy_3 \wedge Exy_4).$$

Aufgabe 29. (a) Welche der folgenden Sequenzen sind korrekt?

1. $\varphi \quad \psi \quad (\varphi \vee \exists x \psi)$
2. $\exists x \varphi \quad \forall x \varphi$

(b) Welche der folgenden Regeln sind korrekt?

1. $$\frac{\begin{array}{lll}\Gamma & \varphi_1 & \psi_1 \\ \Gamma & \varphi_2 & \psi_2\end{array}}{\begin{array}{lll}\Gamma & (\varphi_1 \vee \varphi_2) & (\psi_1 \vee \psi_2)\end{array}}$$

2. $$\frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad \forall x\varphi}$$

Aufgabe 30. Berechnen Sie $\left[[\exists v_3 f(v_3, v_3) \equiv v_1] \frac{v_3}{v_1} \right] \frac{f(v_1,v_2)}{v_3}$.

Aufgabe 31. *(Diese Aufgabe wird auf dem nächsten Übungsblatt fortgesetzt.)*
Im Folgenden bezeichne $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Die Mengen V_n und $\overline{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ seinen induktiv wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset, & \overline{0} &= \emptyset, \\ V_{n+1} &= \mathcal{P}(V_n), & \overline{n+1} &= \overline{n} \cup \{\overline{n}\}. \end{aligned}$$

Weiter sei $V_{\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Zeigen Sie:

1. V_n ist endlich.
2. $V_n \subseteq V_m$ für $n < m$.
3. Aus $x \in V_n$ folgt $x \subseteq V_n$.
4. Aus $x \in V_{\mathbb{N}}$ folgt $x \subseteq V_{\mathbb{N}}$.
5. $\overline{n} \in V_{n+1} \setminus V_n$.
6. $V_{\mathbb{N}}$ ist abzählbar.

Geben Sie $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$ und $\overline{3}$ explizit an.
Sei $A = \{\overline{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, 0^A = \overline{0}$ und $\sigma^A : A \to A$ sei definiert durch $\sigma^A(\overline{n}) = \overline{n+1}$. Zeigen Sie, daß die Struktur $(A, \sigma^A, 0^A)$ die Peanoaxiome (P1) bis (P3) erfüllt.

Abgabe: Mittwoch, 11. Juni 2008, vor der Vorlesung.