Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

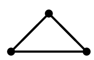
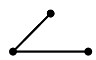
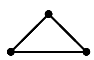
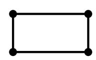
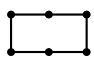
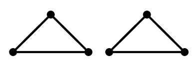
SS 2008, Blatt 7

Aufgabe 32.

1. Ist für beliebige φ und ψ die Regel $\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \\ \Gamma & \psi \\ \hline \Gamma & (\varphi \wedge \psi) \end{array}$ ableitbar?

2. Ist für beliebige φ und ψ die Sequenz $(\varphi \vee \neg\psi)\ \psi\ \varphi$ ableitbar?

Aufgabe 33. Sei $S = \{R\}$ mit zweistelligem R. Man zeige jeweils *mittels des Isomorphielemmas*, daß die S-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht isomorph sind.

1. Die Graphen $\mathfrak{A} =$  und $\mathfrak{B} =$ 
2. Die Graphen $\mathfrak{A} =$  und $\mathfrak{B} =$ 
3. Die Graphen $\mathfrak{A} =$  und $\mathfrak{B} =$ 
4. Die Ordnungen $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{Z}, <)$
5. Die Strukturen $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, \equiv_2)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{Z}, \equiv_3)$, wobei $\equiv_n$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert ist durch

$$\equiv_n = \{(p, q) \mid p, q \in \mathbb{Z}, n | q - p\}.$$

Aufgabe 34. Sei die $\{E\}$-Struktur $\mathfrak{G}$ ein Graph. Man gebe für $n \geq 0$ eine Formel $\varphi_n(x, y)$ an, sodaß für alle $a, b \in G$ gilt:

$$\mathfrak{G} \models \varphi_n[a, b] \iff \text{es gibt einen Weg der Länge } n \text{ von } a \text{ nach } b \text{ in } \mathfrak{G}.$$

Für $n \geq 0$ ist ein Tupel $(a_0, \ldots, a_n) \in G^{n+1}$ ein *Weg in* $\mathfrak{G}$ gdw. für $i = 1, \ldots, n$ gilt: $(a_{i-1}, a_i) \in E^{\mathfrak{G}}$; $(a_0, \ldots, a_n)$ ist dann ein Weg in $\mathfrak{G}$ *von* a_0 *nach* a_n der *Länge* n.

Aufgabe 35. Sei $\Phi \subseteq L^S$ widerspruchsfrei und $\mathfrak{I}^\Phi$ die Henkin-Interpretation zu Φ. Man zeige:

1. Falls jedes $\varphi \in \Phi$ die Gestalt $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$ mit atomarem ψ hat, so gilt $\mathfrak{I}^\Phi \models \Phi$. Man folgere: die Struktur $\mathfrak{T}^{\Phi_{\mathrm{Grp}}}$ ist eine Gruppe.

2. Gilt $\mathfrak{I}^\Phi \models \Phi$, so hat $\mathfrak{I}^\Phi$ die folgende *universelle Eigenschaft*: Für jedes Modell $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ von Φ wird durch $h : \overline{t} \mapsto \mathfrak{I}(t)$ für $t \in T^S$ ein Homomorphismus $h : \mathfrak{T}^\Phi \to \mathfrak{A}$ definiert. (Insbesondere ist zu zeigen, daß h wohldefiniert ist.)

Aufgabe 36. Seien V_n und $V_{\mathbb{N}}$ wie in Aufgabe 31 definiert. Sei $\underline{\varepsilon}$ ein zweistelliges Relationssymbol und

$$\underline{\varepsilon}^{V_n} = \{(x, y) \mid x, y \in V_n,\ x \in y\},$$
$$\underline{\varepsilon}^{V_{\mathbb{N}}} = \{(x, y) \mid x, y \in V_{\mathbb{N}},\ x \in y\}.$$

Gilt $(V_5, \underline{\varepsilon}^{V_5}) \models \varphi$, $(V_{\mathbb{N}}, \underline{\varepsilon}^{V_{\mathbb{N}}}) \models \varphi$ für folgende Aussagen φ?

(EXT) $\varphi = \forall x \forall y (\forall z (\underline{\varepsilon} zx \leftrightarrow \underline{\varepsilon} zy) \to x \equiv y)$

(PAAR) $\varphi = \forall x \forall y \exists z \forall w (\underline{\varepsilon} wz \leftrightarrow (w \equiv x \vee w \equiv y))$

(POT) $\varphi = \forall x \exists y \forall z (\underline{\varepsilon} zy \leftrightarrow \forall v (\underline{\varepsilon} wz \leftarrow \underline{\varepsilon} wx))$

(AUS) $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall x \exists y \forall z (\underline{\varepsilon} zy \leftrightarrow (\underline{\varepsilon} zx \wedge \psi(z, x_1 \ldots, x_n)))$ für $\psi(z, x_1, \ldots, x_n)$ beliebig.

Abgabe: Mittwoch, 18. Juni 2008, vor der Vorlesung.