Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

SS 2008, Blatt 8

Aufgabe 37. Sei $S = \{P, R, f, g\}$, wobei P und f einstellig, R und g zweistellig sind. Geben Sie einen termreduzierten S-Ausdruck an, der logisch äquivalent ist zu

$$\exists y\, ((\neg Pg(x, f(y)) \vee Rg(x,y)f(g(x,y))) \wedge f(y) \equiv g(y,y))\,.$$

Aufgabe 38. Geben Sie eine syntaktische Interpretation I von S_{Ar} in S_{Ar} an, sodaß

$$(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1) = (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)^{-I}.$$

(Hinweis: Jede natürliche Zahl ist Summe von vier Quadratzahlen.)

Aufgabe 39. (a) Sei $S_1 = \{+, \cdot, 0\}$ und $\mathcal{R}_1 = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$. Zeigen Sie, daß die Kleiner-Beziehung $<$ in $\mathcal{R}_1$ elementar definierbar ist, d.h. daß ein S_1-Ausdruck φ existiert, sodaß für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $\mathcal{R}_1 \models \varphi[a, b]$ gdw. $a < b$.

(b) Sei $S_2 = \{+, 0\}$ und $\mathcal{R}_2 = (\mathbb{R}, +, 0)$. Zeigen Sie, daß die Kleiner-Beziehung $<$ nicht in $\mathcal{R}_2$ elementar definierbar ist. (*Hinweis:* Arbeiten Sie mit einem geeigneten Automorphismus von $\mathcal{R}_2$.)

Aufgabe 40. Seien $\Phi_1 \subseteq L_0^{S_1}$ und $\Phi \subseteq L_0^{S}$. Eine syntaktische Interpretation I von S_1 in S ist eine *Interpretation von* Φ_1 *in* Φ gdw. es zu jedem $\mathfrak{A} \models \Phi_1$ ein $\mathfrak{B} \models \Phi \cup \Phi_I$ gibt mit $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}^{-I}$.

1. Zeigen Sie, daß dann für alle $\varphi \in L_0^{S_1}$ gilt:

$$\Phi_1 \models \varphi \iff \Phi \cup \Phi_I \cup \{\chi^I \mid \chi \in \Phi_1\} \models \varphi^I.$$

2. Es sei $S_1 = \{R\}$ mit dreistelligem R, $S = \{E\}$ mit zweistelligem E, $\Phi_1 = \emptyset$ und $\Phi = \Phi_{\mathrm{Graph}}$. Geben Sie eine Interpretation von Φ_1 in Φ an.

Aufgabe 41. Sei $S = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$.

(a) Ein Körper K heißt algebraisch abgeschlossen, falls jedes nicht-konstante Polynom mit Koeffizienten in K eine Nullstelle in K besitzt. Geben Sie eine Menge Φ von S-Sätzen an, sodaß für jeden Körper K (aufgefaßt als S-Struktur) gilt:

$$K \text{ ist algebraisch abgeschlossen gdw. } K \models \Phi.$$

(b) Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, daß der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen algebraisch abgeschlossen ist. Folgern Sie, daß für jede S-Struktur $\mathcal{R}$ mit $\mathcal{R} \equiv (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ jede Körpererweiterung $\mathcal{K}$ von $\mathcal{R}$ vom Grad 2 algebraisch abgeschlossen ist.

(*Hinweise: 1.* Für eine Symbolmenge S heißen zwei S-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ elementar äquivalent, in Zeichen $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, falls für alle S-Sätze $\varphi \in L_0^S$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{B} \models \varphi$.

2. Verwenden Sie, daß für alle $\mathcal{R} \equiv (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ je zwei Körpererweiterungen von $\mathcal{R}$ vom Grad 2 isomorph sind als S-Strukturen.)

Abgabe: Mittwoch, 25. Juni 2008, vor der Vorlesung.