Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Bijan Afshordel

SoSe 2010
5.7.2010

# Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Blatt 11

Abgabe: Mo, 12.7.2010 bis 9:10 Uhr

**Aufgabe 41.**
In einem kompakten metrischen Raum $X$ sei ein System abgeschlossener Teilmengen $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ mit leerem Durchschnitt $\bigcap_{K \in \mathcal{K}} K = \emptyset$ gegeben. Man zeige, daß es bereits ein endliches Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ gibt mit $\bigcap_{K \in \mathcal{E}} K = \emptyset$.

**Aufgabe 42.**
Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $A$ eine orthogonale $3 \times 3$-Matrix und $A(M)$ das Bild von $M$ unter der von $A$ induzierten Abbildung. Man zeige, daß

$$\int_M 1 = \int_{A(M)} 1\,.$$

**Aufgabe 43.**
Sei $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine periodische stetig differenzierbare Abbildung mit nirgends verschwindendem Differential, sodaß also das Bild $M$ von $\gamma$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist. Bezeichnet $a$ die Periode von $\gamma$, so zeige man

$$\int_M 1 = L(\gamma|_{[0,a]})\,.$$

**Aufgabe 44.**
Für relle Zahlen $r, R \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < R$ zeige man, daß die Oberfläche des Schwimmrings in $\mathbb{R}^3$

$$T_{R,r} = \left\{ R \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos(s)\,\cos(t) \\ \cos(s)\,\sin(t) \\ \sin(s) \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit ist und berechne heuristisch seine Oberfläche.