Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Bijan Afshordel SoSe 2010
26.4.2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Blatt 2

Abgabe: Mo, 3.5.2010 bis 9:10 Uhr

Aufgabe 5.
Geben Sie eine Reihendarstellung der folgenden Funktion an (mit Beweis):

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t^2)}{t}\, dt \text{ falls } x \neq 0 \text{ und } f(0) = 0$$

Aufgabe 6.
$\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ bezeichne die Menge der $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$\exp : \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}),\ \exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

differenzierbar ist bei der Nullmatrix mit Differential $\mathrm{d}_0 \exp = \mathrm{id}$.

Aufgabe 7.
Bestimmen Sie die Stellen, an denen die Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = |x|$ differenzierbar ist, und berechnen Sie an diesen Stellen den Gradienten. Hierbei bezeichne $|.|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Fertigen Sie eine Skizze für den Fall $n = 2$ an.

Aufgabe 8.
Sei $\mathrm{inv} : \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{R})$ das Invertieren von Matrizen, $\mathrm{inv}(X) = X^{-1}$. Man zeige für das Differential des Invertierens bei der Einheitsmatrix I die Formel $\mathrm{d}_I \,\mathrm{inv} : H \mapsto -H$. Man zeige allgemeiner, daß das Differential dieser Abbildung am Punkt P in Verallgemeinerung der Ableitungsregel für $x \mapsto 1/x$ gegeben wird durch

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}_P \,\mathrm{inv} : & \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{R}) \\ & H & \mapsto & -P^{-1} H P^{-1} \end{array}$$

Hinweis: Man zeige zunächst, daß inv differenzierbar ist. Dann nehme man in der Gleichung $\mathrm{inv}(X)X = I$ auf beiden Seiten das Differential an der Stelle P. Alternative: Man wähle eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und die zugehörige Matrixnorm auf $\mathrm{M}(n \times n; \mathbb{R})$ und beachte, daß für alle Matrizen H der Norm < 1 gilt $(I - H)(I + H + H^2 + H^3 \ldots) = I$.