Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Bijan Afshordel

SoSe 2010
10.5.2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Blatt 4

Abgabe: Mo, 17.5.2010 bis 9:10 Uhr

Aufgabe 13.
Berechnen Sie $f^{(5)}(0)$ für die Funktion

$$f : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1+\sinh(x)}\ .$$

Aufgabe 14.
Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei der Laplaceoperator definiert als

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\ .$$

Zeigen Sie, daß

$$(\Delta f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2n}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2n} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} f(x+\varepsilon e_\nu) + f(x-\varepsilon e_\nu) \Big) - f(x) \right)\ .$$

Aufgabe 15.
Ist $A \in \mathrm{O}(n)$ eine orthogonale Matrix und bezeichnet $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die zugehörige lineare Abbildung, so zeige man für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ die Formel

$$\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A\ .$$

Aufgabe 16.
Nun sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie für $x = (x_1, x_2) \in U$, daß

$$(\Delta f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0}\ \frac{6}{\varepsilon^2} \left(\frac{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x_1+t_1, x_2+t_2)\, \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2}{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2} - f(x) \right)\ .$$