

---

## Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

### Blatt 4

Abgabe: Mo, 17.5.2010 bis 9:10 Uhr

---

#### Aufgabe 13.

Berechnen Sie  $f^{(5)}(0)$  für die Funktion

$$f : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 + \sinh(x)} .$$

Hinweis: Rechnen mit Approximationen.

#### Aufgabe 14.

Für eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$  sei der Laplaceoperator definiert als

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} .$$

Zeigen Sie, daß

$$(\Delta f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2n}{\varepsilon^2} \left( \frac{1}{2n} \left( \sum_{\nu=1}^n f(x + \varepsilon e_\nu) + f(x - \varepsilon e_\nu) \right) - f(x) \right) .$$

#### Aufgabe 15.

Ist  $A \in O(n)$  eine orthogonale Matrix und bezeichnet  $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  die zugehörige lineare Abbildung, so zeige man für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  die Formel

$$\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A .$$

#### Aufgabe 16.

Nun sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie für  $x = (x_1, x_2) \in U$ , daß

$$(\Delta f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{6}{\varepsilon^2} \left( \frac{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x_1 + t_1, x_2 + t_2) dt_1 dt_2}{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt_1 dt_2} - f(x) \right) .$$