Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Bijan Afshordel

SoSe 2010
17.5.2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Blatt 5

Abgabe: Mo, 31.5.2010 bis 9:10 Uhr

Aufgabe 17
Man bestimme die kritischen Punkte der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und untersuche sie auf lokale und globale Extrema.

(a) $f(x, y) = x + xy + y^2$

(b) $f(x, y) = (2x^2 + y^2) \exp(-x^2 - y^2)$

Aufgabe 18.
Die nichtkonstante Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei d-mal stetig differenzierbar auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, mit $d \geq 2$. Für einen Punkt $p \in A$ schreiben wir

$$f(p + h) = f(p) + f_1(h) + \cdots + f_d(h) + |h|^d \cdot \varepsilon(h) \,,$$

wobei $f_k(h) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{(\partial^\alpha f)(p)}{\alpha!} h^\alpha$, und setzen $f_{d+1}(h) = |h|^d \cdot \varepsilon(h)$. Sei k_0 minimal mit $f_{k_0} \neq 0$. Man zeige, daß f in p genau dann ein lokales isoliertes Maximum bzw. Minimum besitz, wenn f_{k_0} in p ein lokales isoliertes Maximum bzw. Minimum besitz.

Aufgabe 19.
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Man zeige für (den nicht notwendigerweise kritischen) Punkt $p \in A$, daß f bei p kein lokales Maximum hat, falls die quadratische Form

$$q_p(h) = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) h_i h_j$$

positiv semidefinit und verschieden von Null ist.

Aufgabe 20.
Bestimmen Sie alle Extremstellen der Funktion

$$f : [0, 2] \times [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 2x - 7y + 8 \,.$$