Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Bijan Afshordel

SoSe 2010
31.5.2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II

Blatt 6

Abgabe: Mo, 7.6.2010 bis 9:10 Uhr

Aufgabe 21
Man finde ein Vektorfeld $A \neq 0$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sowie ein Kovektorfeld $\omega \neq 0$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $(\lambda\cdot) : A \rightsquigarrow A$ und $(\lambda\cdot) : \omega \rightsquigarrow \omega$ für alle $\lambda \neq 0$.

Aufgabe 22.
X und Y seien reelle Räume, $U \subset X$ und $V \subset Y$ offene Teilmengen und $\phi : U \longrightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung. Man zeige: Sind η und ω Kovektorfelder auf U bzw. V mit $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$, sowie A und B Vektorfelder auf U bzw. V mit $\phi : A \rightsquigarrow B$, so gilt

$$\phi : \langle A, \eta \rangle \rightsquigarrow \langle B, \omega \rangle \,.$$

Aufgabe 23.
Man zeige, daß die Standardmetrik im xyz-Raum unter den Kugelkoordinaten

$$\begin{array}{rccl} K : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r, \vartheta, \varphi) & \mapsto & (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta) \end{array}$$

verwandt ist zur Metrik

$$g = \mathrm{d}r^{\otimes 2} + r^2 \mathrm{d}\vartheta^{\otimes 2} + (r\sin\vartheta)^2 \mathrm{d}\varphi^{\otimes 2} \,.$$

Aufgabe 24.
Man zeige, daß der Gradient in Kugelkoordinaten (siehe Aufgabe 23) ausgedrückt wird durch die Formel

$$\mathrm{grad} f = f_r \partial_r + r^{-2} f_\vartheta \partial_\vartheta + (r\sin\vartheta)^{-2} f_\varphi \partial_\varphi \,.$$