Prof. Dr. Wolfgang Soergel SoSe 2010

Probeklausur zur Vorlesung Analysis II

Zeit: 3 Stunden

Aufgabe 1. (3 Punkte)
Beantworten Sie folgende Fragen jeweils nur mit Ja oder Nein (ohne Begründung).

(a) Ist die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$?

(b) Ist die Vereinigung zweier kompakter Mengen in einem metrischen Raum wieder kompakt?

(c) Sind in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ je zwei Wege von 1 zu 2 homotop?

Aufgabe 2. (4 Punkte)

(a) Man definiere: Eine Teilmenge eines metrischen Raumes ist kompakt genau dann, wenn ...

(b) Man gebe eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ an, welche kompakt ist, und eine, welche nicht kompakt ist (ohne Begründungen).

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Berechnen Sie die Bogenlänge des Weges

$$\gamma : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \big(\frac{1}{2}t^2 + 10,\, t\big)\,.$$

Aufgabe 4. (4 Pnukte)
Man bestimme alle Lösungen $x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \frac{x}{\cos^2(t)}\,.$$

Aufgabe 5. (4 Pnukte)
X und Y seien reelle Räume, $U \subset X$ und $V \subset Y$ offene Teilmengen und $\phi : U \longrightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung. Man zeige: Sind η und ω ϕ-verwandte Kovektorfelder auf U bzw. V, in Formeln $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$, sowie A und B ϕ-verwandte Vektorfelder auf U bzw. V, in Formeln $\phi : A \rightsquigarrow B$, so gilt

$$\phi : \langle A, \eta\rangle \rightsquigarrow \langle B, \omega\rangle\,,$$

alias $\langle A, \eta\rangle = \langle B, \omega\rangle \circ \phi$.

Aufgabe 6. (4 Punkte)
Man entscheide, ob das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2y + x^2u^2 - 3yv^2 &= -1 \\ uv^2 + 6y + xyuv &= 8 \end{aligned}$$

lokal um den Punkt $(1,1,1,1)$ in der Form $u = g(x,y)$ und $v = h(x,y)$ auflösbar ist und berechne gegebenenfalls die ersten partiellen Ableitungen von $g(x,y)$ und $h(x,y)$ im Punkt $(1,1)$.

Aufgabe 7. (4 Punkte)
Man entwickle die Funktion $f(x,y) = \exp(x\sin(y))$ in eine Taylorreihe um den Nullpunkt bis zur Ordnung 5.

Aufgabe 8. (4 Punkte)
Man bestimme Maximum und Minimum der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + 2(x+y) + y^2 + 3$$

auf $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Aufgabe 9. (4 Punkte)
Man gebe den Verwandten des Kovektorfeldes $\omega = y\mathrm{d}x$ unter Kugelkoordinaten

$$\begin{array}{rccl} K: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r,\vartheta,\varphi) & \mapsto & (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta) \end{array}$$

an.

Aufgabe 10. (4 Punkte)
Man entscheide, ob das Kovektorfeld

$$\omega \;=\; y\,\mathrm{d}x \;+\; (x + ze^{yz})\,\mathrm{d}y \;+\; ye^{yz}\,\mathrm{d}z$$

ein Potential besitzt und gebe es gegebenenfalls an.