Übungen zur Vorlesung
Logik für Informatiker
WS 2008/09, Blatt 12

Dies ist das letzte Übungsblatt!

Abgabe: Mittwoch, 4. Februar 2009, vor der Vorlesung

Schreiben Sie bitte den Namen Ihres Tutors auf Ihr Lösungsblatt!

Aufgabe 1. (Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist verbindlich.) Die Formel

$$\varphi = \forall v_2((\forall v_0 \forall v_1(B(v_0, v_1) \to B(v_0, g(v_1)))) \to (\forall v_1(B(v_2, v_1) \to B(v_2, g(g(v_1))))))$$

ist allgemeingültig (vergleiche Aufgabe 1 auf Blatt 9). Zeigen Sie dies, indem Sie wie folgt vorgehen:

1. Geben Sie eine Herbrand-Normalform $\exists x_1 \dots \exists x_n \psi(x_1, \dots, x_n)$ zu φ an.
2. Finden Sie Terme $t_1^1, t_2^1, \dots, t_n^1, \dots, t_1^N, t_2^N, \dots t_n^N$, für die $\bigvee_{i=1}^{N} \psi(t^i)$ allgemeingültig ist.
3. Zeigen Sie die Allgemeingültigkeit von $\bigvee_{i=1}^{N} \psi(t^i)$ mittels Resolution.

Aufgabe 2. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen:

1) Jeder Barbier rasiert alle Personen, die sich nicht selbst rasieren.

2) Kein Barbier rasiert jemanden, der sich selbst rasiert.

Verwenden Sie dabei $B(x)$ für "x ist ein Barbier" und $R(x, y)$ für "x rasiert y". Folgern Sie wie in Aufgabe 1, daß es keine Barbiere gibt.

Aufgabe 3. Gegeben sei eine quantorenfreie Formel $\psi(x_1, \dots, x_n)$ ohne Gleichheitszeichen. Kann man effektiv entscheiden, ob es eine natürliche Zahl N und konstante Terme

$$t_1^1, t_2^1, \dots, t_n^1, \dots, t_1^N, t_2^N, \dots t_n^N$$

gibt, für die

$$\bigvee_{i=1}^{N} \psi(t^i)$$

allgemeingültig ist? Begründen Sie Ihre Antwort und vergleichen Sie sie mit Folgerung 2.5.7. der Vorlesung.

Aufgabe 4. Gegeben sei die Formel $\varphi = \forall x \exists y R(x, y)$ in der Sprache $L = \{R\}$. Geben Sie ein Verfahren an, welches angesetzt auf eine endliche L-Struktur $\mathcal{A}$ mit Grundmenge $\{1, \dots, n\}$ (für ein $n \in \mathbb{N}$) in polynomialer Zeit entscheidet, ob $\mathcal{A} \models \varphi$. Zeigen Sie, daß Ihr Verfahren polynomielle Laufzeit in der Eingabe $\mathcal{A}$ (siehe Kodierung) hat.
Zur Kodierung: Verwenden Sie das Alphabet $A = \{|, (,), ;\}$. Für die Struktur $\mathcal{A} = (\{1, \dots, n\}, R^{\mathcal{A}})$ stehe im Register R_1 das Wort $\underbrace{| \dots |}_{n\,\text{mal}}$. Im Register R_2 stehe das Wort

$w = w_1 w_2 \dots w_k$ mit $w_i = (\underbrace{| \dots |}_{n_i\,\text{mal}}; \underbrace{| \dots |}_{m_i\,\text{mal}})$, falls $R^{\mathcal{A}} = \{(n_1, m_1), (n_2, m_2), \dots, (n_k, m_k)\}$.

Zum Beispiel steht für $\mathcal{A} = \Big(\{1, 2, 3\}, \{(1, 1), (1, 3)\}\Big)$ in R_2 das Wort $(|;|)(|;|||)$.