Übungen zur Vorlesung
Logik für Informatiker
WS 2008/09, Blatt 7

Abgabe: Mittwoch, 17. Dezember 2008, vor der Vorlesung

Schreiben Sie bitte den Namen Ihres Tutors auf Ihr Lösungsblatt!

Allgemeiner Hinweis: Es besteht **Anwesenheitspflicht bei den Übungen**!

Aufgabe 1. Sei $L = \{P, U, <, d\}$, wobei $<$ ein zweistelliges und P, U einstellige Relationszeichen sind und d ein Konstantenzeichen. Es sei

$$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, P^{\mathfrak{N}}, U^{\mathfrak{N}}, <^{\mathfrak{N}}, d^{\mathfrak{N}}),$$

wobei $P^{\mathfrak{N}}$ die Menge der Primzahlen ist, $U^{\mathfrak{N}}$ die Menge der ungeraden Zahlen, $<^{\mathfrak{N}}$ die übliche Ordnung auf $\mathbb{N}$ und $d^{\mathfrak{N}} = 3$. Symbolisieren Sie:

1. Nicht alle natürlichen Zahlen sind prim.
2. Es gibt eine von 3 verschiedene Primzahl.
3. Zu jeder Primzahl gibt es eine größere.
4. Es gibt genau eine gerade Primzahl.
5. Es gibt eine kleinste natürliche Zahl.
6. Nicht jede natürliche Zahl größer 3 ist prim.
7. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Aufgabe 2. Sei $L = \{+, \cdot\}$ für zweistellige Funktionszeichen $\cdot$ und $+$. Weiterhin sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}})$ mit der gewöhnlichen Addition $+^{\mathbb{N}}$ und Multiplikation $\cdot^{\mathbb{N}}$ auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

1. Sei $t(x, y, u, z, v) = x \cdot (y + z)$; berechnen Sie $t^{\mathfrak{A}}[1, 1, 2, 3, 5]$ und $t^{\mathfrak{A}}[2, 3, 5, 7, 11]$.
2. Sei $\varphi(x, y, z) = \exists x\ z \doteq x + y$. Gilt $\mathfrak{A} \models \varphi[2, 1, 2]$? Gilt $\mathfrak{A} \models \varphi[2, 5, 3]$?
3. Sei $\psi(y) = \exists x\, \forall x\ x + x \doteq y$. Gilt $\mathfrak{A} \models \psi[4]$?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 3. Sei $L = \{P, Q, R\}$ mit einstelligen Relationszeichen P, R und zweistelligem Relationszeichen Q. Sei

$$\varphi = \forall x(Rx \to (Qxy \land \neg Py)) \ .$$

Geben Sie eine L-Struktur $\mathfrak{A}$ an sowie zwei Belegungen β und γ an, sodaß $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ und $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\gamma]$.

Aufgabe 4. Sei G eine Menge und f eine zweistellige Operation auf G. Ein Element $g \in G$ heißt neutrales Element bezüglich f, falls für alle $h \in G$ gilt:

$$f(g, h) = f(h, g) = h \ .$$

Sei nun $L = \{\circ, e\}$ mit zweistelligem Funktionszeichen $\circ$ und Konstantenzeichen e. Geben Sie eine L-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \circ^{\mathfrak{A}}, e^{\mathfrak{A}})$ an, sodaß $e^{\mathfrak{A}}$ neutrales Element bezüglich $\circ^{\mathfrak{A}}$ ist, und eine L-Struktur $\mathfrak{B} = (B, \circ^{\mathfrak{B}}, e^{\mathfrak{B}})$, sodaß $e^{\mathfrak{B}}$ nicht neutrales Element bezüglich $\circ^{\mathfrak{B}}$ ist. Können Sie $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ so angeben, daß sowohl Grundmengen als auch Operationen übereinstimmen?