Übungen zur Vorlesung
Logik für Informatiker
WS 2008/09, Blatt 8

Abgabe: Mittwoch, 7. Januar 2009, vor der Vorlesung

Schreiben Sie bitte den Namen Ihres Tutors auf Ihr Lösungsblatt!

Aufgabe 1. (Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist verbindlich.)
Sei $L = \{P, G, I\}$ mit einstelligen Relationszeichen P, G und zweistelligem Relationszeichen I. Wir lesen $P(x)$ als “x ist ein Punkt”, $G(x)$ als “x ist eine Gerade” und $I(x, y)$ als “x ist ein Punkt, y eine Gerade und x liegt auf y”.

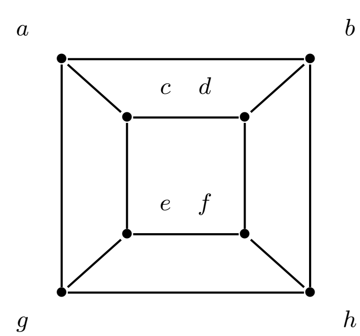
a) Symbolisieren Sie:

- Zu je zwei Punkten gibt es genau eine Gerade, auf der beide liegen.
- Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte.
- Je zwei Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

b) Welche der folgenden Zeichenfolgen sind L-Formeln? Begründen Sie Ihre Antwort. Formulieren Sie gegebenenfalls umgangssprachlich, was die jeweilige Formel ausdrückt.

- $\forall x \forall y \forall z((I(x, y) \wedge G(z)) \rightarrow (I(x, z) \vee \neg y \doteq z))$
- $\exists x \forall y I(x, y) \rightarrow \neg \exists z(f(z) \doteq x \wedge I(z, y))$

Aufgabe 2. Sei $L = \{E\}$ mit zweistelligem Relationszeichen E. $\mathcal{G}$ sei der folgende Graph:



a) Gilt $\mathcal{G} \models \exists x \exists y \exists z(Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$?

b) Gilt $\mathcal{G} \models \forall x \forall y(\neg Exy \rightarrow \exists z(Exz \wedge Ezy))$?

c) Gilt $\mathcal{G} \models \forall x \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \exists y_4(Exy_1 \wedge Exy_2 \wedge Exy_3 \wedge Exy_4)$?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 3. Sei $L = \{P, f\}$ für ein dreistelliges Relationszeichen P und ein zweistelliges Funktionszeichen f. Betrachten Sie die folgenden L-Formeln:

$$\varphi_1 = \exists v_3(P(v_1, v_2, v_3) \wedge (\forall v_1 P(v_1, v_2, v_3) \vee \forall v_2 P(v_4, v_2, v_3)))$$
$$\varphi_2 = \exists v_3(P(v_1, v_2, v_3) \wedge (\forall v_2 P(v_1, v_2, v_3) \vee \forall v_1 P(v_4, v_2, v_3)))$$

a) Welche der Variablen treten frei auf? Welche gebunden?

b) Ist v_1 frei für $f(v_0, v_2)$ in φ_1? In φ_2?

c) Bestimmen Sie $\varphi_1\frac{f(v_0,v_2)}{v_1}$ und $\varphi_2\frac{f(v_0,v_2)}{v_1}$.

d) Welche Variablen treten nach der Substitution frei auf? Welche gebunden?

Aufgabe 4. L sei eine endliche Sprache. Zeigen Sie, daß es für jede endliche L-Struktur $\mathcal{A}$ eine L-Aussage φ gibt mit der Eigenschaft, daß für alle L-Strukturen $\mathcal{B}$ gilt:

$$\mathcal{B} \models \varphi \text{ gdw. } \mathcal{A} \cong \mathcal{B}.$$

Sie können der Einfachheit halber annehmen, daß $L = \{E\}$ für ein zweistelliges Relationszeichen E.

Wir wünschen Ihnen Frohe Weihnachten und einen guten Start ins Neue Jahr!