

Mehrfachintegrale — WS 2012/13

Sebastian Goette

Inhaltsverzeichnis

Mehrfachintegrale	1
1. Das Jordan-Volumen	1
2. Das Riemann-Integral	7
3. Parameterintegrale, uneigentliche Integrale	13
4. Die Transformationsformel	21
5. Integration über Untermannigfaltigkeiten	28
6. Der Divergenzsatz von Gauß	37
Literaturverzeichnis	47
Notation	49
Stichwortverzeichnis	51

Mehrfachintegrale

Ziel der Vorlesung ist es, in sechs kurzen Lektionen die Grundlagen der mehrdimensionalen Integration und ein paar kleine Anwendungen zu erklären. Dabei wird Maßtheorie komplett ausgespart und nur ein Riemann-Integral eingeführt.

Die Vorlesung ist so konzipiert, dass sie den Anforderungen der Lehramtsprüfungsordnung „GymPO“ von 2010 genügt. Sie reicht aus, um anschließend Vorlesungen wie „Elementare Differentialgeometrie“ zu hören. Sie reicht nicht aus für Vorlesungen, in denen ein gutes Verständnis von Maß- und Integrationstheorie vorausgesetzt wird.

Der Vorlesungsstoff ist eine echte Teilmenge des Stoffes der Analysis III, auch wenn ein anderer Integrationsbegriff zugrunde liegt. Es ist daher im Normalfall nicht sehr sinnvoll, beide Vorlesungen zu besuchen.

1. Das Jordan-Volumen

Wir beginnen damit, einen Volumeninhalt auf dem \mathbb{R}^n zu definieren. Es ist nicht möglich, für jede Teilmenge des \mathbb{R}^n (falls $n \geq 3$) ein sinnvolles Volumen zu definieren [2, 7.1]. Stattdessen wollen wir einen Begriff von Messbarkeit einführen und nur messbaren Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Volumen $\text{vol}^n A$ zuordnen. Dieses Volumen sollte folgende Eigenschaften haben.

- (1) *Positivität:* Wenn $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar ist, gilt

$$0 \leq \text{vol}^n(A) .$$

- (2) *Additivität:* Wenn $A, B \subset \mathbb{R}^n$ disjunkt sind und zwei der drei Mengen A, B und $A \dot{\cup} B$ messbar sind, dann ist auch die dritte messbar, und es gilt

$$\text{vol}^n(A \dot{\cup} B) = \text{vol}^n A + \text{vol}^n B .$$

- (3) *Translationsinvarianz:* Wenn A messbar sind und $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist auch $T_x A = \{x + y \mid y \in A\}$ messbar mit

$$\text{vol}^n(T_x A) = \text{vol}^n A .$$

- (4) *Normierung:* Der rechtshalboffene Einheitswürfel $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ ist messbar mit

$$\text{vol}^n([0, 1]^n) = 1 .$$

Aus Positivität und Additivität folgt sofort *Monotonie*: Wenn $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ messbar sind, gilt

$$(5) \quad \text{vol}^n A = \text{vol}^n B - \text{vol}^n(B \setminus A) \leq \text{vol}^n(B) .$$

Wir werden später sehen, dass unser Volumenbegriff noch weitere schöne Eigenschaften hat, zum Beispiel ist er auch invariant unter Euklidischen Isometrien. Wir fordern keine Additivität bei abzählbaren disjunkten Vereinigungen (σ -Additivität). Auf diese Weise kommen wir mit weitaus weniger messbaren Mengen aus, siehe Proposition 1.6 unten. Auf der anderen Seite wird unser Volumenbegriff, und auch später der darauf aufbauende Integralbegriff, nicht mächtig genug sein für manche Anwendungen in der Analysis oder in der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Wir werden viel mit Teilmengen des \mathbb{R}^n arbeiten, diese bezeichnen wir meistens mit Großbuchstaben A, B, C etc. Manchmal arbeiten wir mit Mengen, deren Elemente selbst Teilmengen des \mathbb{R}^n sind; diese bezeichnen wir der Übersicht halber mit Schönschriftbuchstaben $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ usw.

Wir fixieren $k \in \mathbb{N}$ und betrachten die Menge

$$(1.1) \quad \mathcal{W}_k^n = \{ [2^{-k}x_1, 2^{-k}(x_1+1)) \times \cdots \times [2^{-k}x_n, 2^{-k}(x_n+1)) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z} \}$$

aller „rechtshalboffenen“ Würfel der Seitenlänge 2^{-k} mit Ecken im Gitter $(2^{-k}\mathbb{Z})^n \subset \mathbb{R}^n$. Für jeden additiven (2), translationsinvarianten (3), normierten Volumenbegriff (4), für den wenigstens der Würfel $[0, 2^{-k})^n$ messbar ist, folgt, dass alle Würfel $W \in \mathcal{W}_k^n$ messbar sind, mit $\text{vol}^n(W) = \text{vol}^n([0, 2^{-k})^n) = 2^{-nk}$, denn der Einheitswürfel $[0, 1)^n$ ist die disjunkte Vereinigung von 2^{nk} dieser Würfel.

Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge. Dann seien

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{M}_k(A) &= \{ w \in \mathcal{W}_k \mid w \subset A \} \\ \text{und} \quad \mathcal{M}^k(A) &= \{ w \in \mathcal{W}_k \mid w \cap A \neq \emptyset \} \end{aligned}$$

die Menge der Würfel aus \mathcal{W}_k^n , die ganz in A liegen, beziehungsweise die die Menge A treffen. Wenn A beschränkt ist, sind beide Mengen endlich. Indem wir alle Würfel aus $\mathcal{M}_k(A)$ beziehungsweise $\mathcal{M}^k(A)$ vereinigen, erhalten wir Teilmengen

$$(1.3) \quad \begin{aligned} M_k(A) &= \bigcup \mathcal{M}_k(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \text{es gibt } W \in \mathcal{M}_k(A) \text{ mit } x \in W \} , \\ \text{und} \quad M^k(A) &= \bigcup \mathcal{M}^k(A) . \end{aligned}$$

So, wie wir die Würfel in $\mathcal{M}_k(A)$ und $\mathcal{M}^k(A)$ ausgewählt haben, folgt

$$M_k(A) \subset A \subset M^k(A) .$$

Wenn A in irgendeinem Sinne messbar ist, sollte das Volumen von A wegen Monotonie (5) zwischen den Volumina der Mengen $\bigcup \mathcal{M}_k(A)$ und $\bigcup \mathcal{M}^k(A)$ liegen; letztere haben wegen Additivität (2) die Volumina

$$(1.4) \quad \begin{aligned} m_k(A) &= \text{vol}^n \bigcup \mathcal{M}_k(A) = 2^{-nk} \# \mathcal{M}_k(A) \\ \text{und} \quad m^k(A) &= \text{vol}^n \bigcup \mathcal{M}^k(A) = 2^{-nk} \# \mathcal{M}^k(A) . \end{aligned}$$

Beim Übergang $k \rightsquigarrow k + 1$ unterteilen wir jeden einzelnen Würfel $W \in \mathcal{W}_k^n$ in 2^n kleinere Würfel. Falls $W \subset A$ gilt, liegt jeder der kleineren Würfel ebenfalls ganz in A . Falls $W \cap A = \emptyset$ gilt, gilt dasselbe auch für jeden der kleineren Würfel. Daraus folgt

$$M_k(A) \subset M_{k+1}(A) \subset A \subset M^{k+1}(A) \subset M^k(A),$$

und somit

$$m_k(A) \leq m_{k+1}(A) \leq m^{k+1}(A) \leq m^k(A).$$

Somit sind die Folgen $(m_k(A))_{k \in \mathbb{N}}$ und $(m^k(A))_{k \in \mathbb{N}}$ monoton und beschränkt und haben daher Grenzwerte in \mathbb{R} . Daher ist die folgende Definition sinnvoll.

1.1. Definition. Eine beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ hat das *innere* und das *äußere Volumen*

$$(1) \quad m_*(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} m_k(A) \quad \text{und} \quad m^*(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} m^k(A)$$

Sie heißt (*Jordan-*) *messbar*, wenn beide Volumina übereinstimmen; in diesem Fall heißt

$$(2) \quad \text{vol}^n A = m_*(A) = m^*(A).$$

ihr (*Jordan-*) *Volumen*. Eine (*Jordan-*) messbare Teilmenge vom Volumen 0 heißt (*Jordan-*) *Nullmenge*.

1.2. Beispiel. Es folgen einfache Beispiele messbarer und nicht-messbarer Mengen.

- (1) Ein beschränktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ der Länge L ist Jordan-messbar mit Volumen L . Denn für jedes $k \in \mathbb{N}$ überdeckt $M_k(I)$ das Intervall jeweils bis auf ein Stück der Länge höchstens 2^{-k} am linken und am rechten Ende, und $M^k(I)$ ragt links und rechts jeweils höchstens um 2^{-k} über I hinaus, so dass

$$L - 2^{1-k} \leq m_k(I) \leq L \leq m^k(I) \leq L + 2^{1-k}.$$

Im Grenzwert $k \rightarrow \infty$ folgt

$$\text{vol}^1 I = \lim_{k \rightarrow \infty} m_k(I) = \lim_{k \rightarrow \infty} m^k(I) = L.$$

Wir nennen das eindimensionale Volumen daher auch „Länge“.

- (2) Es seien jetzt I_1, \dots, I_n Intervalle und

$$A = I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$$

ein achsenparalleler Quader mit Seitenlängen $L_1 = \text{vol} I_1, \dots, L_n = \text{vol} I_n$. Mit analogen Überlegungen wie oben folgt für alle k mit $2^{1-k} \leq \min(L_1, \dots, L_n)$.

$$\prod_{i=1}^n \max(L_i - 2^{1-k}, 0) \leq m_k(A) \leq \prod_{i=1}^n L_i \leq m^k(A) \leq \prod_{i=1}^n (L_i + 2^{1-k}),$$

und somit

$$\text{vol}^n(A) = L_1 \cdots L_n.$$

- (3) Es sei A wie in (2) und $B = A \cap \mathbb{Q}^n$ die Teilmenge aller Punkte mit rationalen Koordinaten. Da B dicht in A liegt, haben A und B dasselbe äußere Volumen

$$m^*(B) = m^*(A) = L_1 \cdots L_n .$$

Auf der anderen Seite enthält jeder Würfel aus \mathcal{W}_k^n immer auch Punkte mit irrationalen Koordinaten, und daher folgt

$$m_*(B) = m_k(B) = 0 .$$

Also ist B nicht messbar, es sei denn $\text{vol}^n A = 0$, also $L_i = 0$ für ein i .

1.3. Bemerkung. Unsere obige Konstruktion zeigt, dass jeder positive, additive, translationsinvariante und normierte Volumenbegriff für eine Jordan-messbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ den gleichen Wert liefern muss, sofern die benutzten Würfel und A selbst messbar sind. Die Beispiele zeigen, dass alle achsenparallelen Quader (egal, ob offen, abgeschlossen oder in welcher Weise auch immer halboffen) das erwartete Volumen haben.

Mit Proposition 1.5 unten könnten wir das innere Volumen auch als Supremum über die Volumina aller disjunkten Vereinigungen beliebiger Quader, die ganz in A enthalten sind, definieren, und erhielten denselben Wert $m_*(A)$. Genauso könnten wir das äußere Volumen auch als Infimum über die Volumina aller Vereinigungen von Quadern definieren, die A umfassen, und erhielten wieder denselben Wert $m^*(A)$, siehe [2, 7.2–7.5]. Das Jordan-Volumen hängt also nicht von der speziellen Wahl der Würfel in \mathcal{W}_k^n ab, sondern nur davon, dass der Durchmesser der Würfel gegen 0 geht für $k \rightarrow \infty$.

Schließlich überlegen wir uns noch, dass unbeschränkte Teilmengen des \mathbb{R}^n nach unserer jetzigen Definition stets unendliches äußeres Maß haben und daher nicht Jordan-messbar sein können. Hier werden wir später noch Abhilfe schaffen.

1.4. Satz. *Das Jordan-Volumen ist positiv, additiv, translationsinvariant und normiert.*

BEWEIS. Positivität ist klar, da $0 \leq m_k(A) \leq m^k(A)$ für alle k .

Zur Additivität seien zunächst $A, B \subset \mathbb{R}^n$ disjunkte, Jordan-messbare Teilmengen. Sei $W \in \mathcal{W}_k^n$. Wenn $W \subset A$ oder $W \subset B$ gilt, folgt sofort $W \subset A \dot{\cup} B$. Außerdem können $W \subset A$ und $W \subset B$ nicht gleichzeitig gelten, da $A \cap B = \emptyset$. Wenn $W \cap A = \emptyset = W \cap B$ gilt, folgt $W \cap (A \dot{\cup} B) = \emptyset$. Also gilt

$$\mathcal{M}_k(A) \dot{\cup} \mathcal{M}_k(B) \subset \mathcal{M}_k(A \dot{\cup} B) \subset \mathcal{M}^k(A \dot{\cup} B) \subset \mathcal{M}^k(A) \cup \mathcal{M}^k(B) ,$$

und somit

$$m_k(A) + m_k(B) \leq m_k(A \dot{\cup} B) \leq m^k(A \dot{\cup} B) \leq m^k(A) + m^k(B) .$$

Diese Ungleichungen bleiben im Limes $k \rightarrow \infty$ erhalten, somit ist $A \dot{\cup} B$ Jordan-messbar und es gilt

$$\text{vol}^n(A \dot{\cup} B) = \text{vol}^n A + \text{vol}^n B .$$

Umgekehrt seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ disjunkt, und $A \dot{\cup} B$ und B seien Jordan-messbar. Wir betrachten die Inklusionen

$$\mathcal{M}_k(A \dot{\cup} B) \setminus \mathcal{M}^k(B) \subset \mathcal{M}_k(A) \subset \mathcal{M}^k(A) \subset \mathcal{M}^k(A \dot{\cup} B) \setminus \mathcal{M}_k(B).$$

Da $\mathcal{M}_k(B) \subset \mathcal{M}_k(A \dot{\cup} B) \subset \mathcal{M}^k(A \dot{\cup} B)$, erhalten wir

$$m_k(A \dot{\cup} B) - m^k(B) \leq m_k(A) \leq m^k(A) \leq m^k(A \dot{\cup} B) - m_k(B).$$

Diese Ungleichungen bleiben wieder im Limes $k \rightarrow \infty$ erhalten, daher ist A auch Jordan-messbar mit $\text{vol}^n A = \text{vol}^n(A \dot{\cup} B) - \text{vol}^n B$ wie oben.

Es sei jetzt $A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $x \in \mathbb{R}^n$. Für jedes k sind die verschobenen Mengen $T_x M_k(A)$ und $T_x M^k(A)$ endliche disjunkte Vereinigungen von achsenparallelen Würfeln der Seitenlänge 2^{-k} mit

$$T_x M_k(A) \subset T_x A \subset T_x M^k(A).$$

Aus Beispiel 1.2 (2) und der soeben bewiesenen Additivität folgt, dass

$$\text{vol}^n(T_x M_k(A)) = 2^{-kn} \# \mathcal{M}_k(A) = m_k(A)$$

$$\text{und} \quad \text{vol}^n(T_x M^k(A)) = 2^{-kn} \# \mathcal{M}^k(A) = m^k(A),$$

und für $k \rightarrow \infty$ konvergieren beide Volumina gegen $\text{vol}^n A$. Jetzt ergibt sich Translationsinvarianz aus Proposition 1.5 unten.

Schließlich ist das Jordan-Volumen normiert, denn es gilt $m_k([0, 1]^n) = m^k([0, 1]^n) = 1$ für alle k . \square

1.5. Proposition. *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$, und es seien $(B_i)_i, (C_i)_i$ Folgen Jordan-messbarer Teilmengen des \mathbb{R}^n , so dass*

$$(1) \quad B_i \subset A \subset C_i \quad \text{für alle } i,$$

$$(2) \quad \text{und} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \text{vol}^n(B_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \text{vol}^n(C_i).$$

Dann ist A messbar mit $\text{vol}^n A = \lim_{i \rightarrow \infty} \text{vol}^n(B_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \text{vol}^n(C_i)$.

BEWEIS. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Voraussetzung (2) finden wir i , so dass

$$\text{vol}^n(C_i) - \text{vol}^n(B_i) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da B_i und C_i Jordan-messbar sind, existiert k , so dass

$$\text{vol}^n(B_i) - m_k(B_i) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad m^k(C_i) - \text{vol}^n(C_i) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für die zugehörigen Würfelmenen gilt offensichtlich

$$\mathcal{M}_k(B_i) \subset \mathcal{M}_k(A) \subset \mathcal{M}^k(A) \subset \mathcal{M}^k(C_i),$$

also gilt auch $m_k(B_i) \leq m_k(A) \leq m^k(A) \leq m^k(C_i)$. Es folgt

$$\begin{aligned} m^k(A) - m_k(A) &\leq m^k(C_i) - \text{vol}^n(C_i) \\ &\quad + \text{vol}^n(C_i) - \text{vol}^n(B_i) \\ &\quad + \text{vol}^n(B_i) - m_k(B_i) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Da wir $\varepsilon > 0$ beliebig klein wählen können, ist A Jordan-messbar mit dem angegebenen Volumen. \square

Wir erinnern uns an die Definition des (topologischen) Randes $\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$. Dabei ist \bar{A} der Abschluss von A , also die kleinste abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^n , die A enthält, und $\overset{\circ}{A}$ das Innere von A , also die größte Teilmenge von A , die in \mathbb{R}^n offen ist. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ liegt in $\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ Punkte $y, z \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y - x\| < \varepsilon$ und $\|z - x\| < \varepsilon$ existieren, so dass $y \in A$ und $z \notin A$.

1.6. Proposition. *Eine beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand $\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ eine Jordan-Nullmenge ist.*

BEWEIS. Zu „ \implies “ nehmen wir an, dass A Jordan-messbar ist. Sei $k \in \mathbb{N}$, dann ist $\overset{\circ}{M}_k(A)$ eine offene Teilmenge von A , und $\bar{M}^k(A)$ eine abgeschlossene Obermenge von A ; es folgt

$$\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} \subset \bar{M}^k(A) \setminus \overset{\circ}{M}_k(A).$$

Sowohl $\overset{\circ}{M}_k(A)$ als auch $\bar{M}^k(A)$ sind disjunkte Vereinigungen von Würfeln der Seitenlänge 2^{-k} , allerdings sind diese Würfel nicht unbedingt rechtshalboffen. Nichtsdestoweniger folgt aus Additivität und Beispiel 1.2 (2), dass

$$\text{vol}^n(\overset{\circ}{M}_k(A)) = m_k(A) \quad \text{und} \quad \text{vol}^n(\bar{M}^k(A)) = m^k(A).$$

Da A Jordan-messbar ist, gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}^n(\bar{M}^k(A) \setminus \overset{\circ}{M}_k(A)) = m^*(A) - m_*(A) = 0.$$

Also ist $\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ nach Proposition 1.5 (mit $B_i = \emptyset$) eine Nullmenge.

Zu „ \impliedby “ nehmen wir an, dass A beschränkt ist, und dass $\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ eine Jordan-Nullmenge ist. Es sei $W \in \mathcal{M}^k(A) \setminus \mathcal{M}_k(A)$, dann enthält W sowohl Punkte aus $y \in A$ als auch Punkte $z \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Es sei t_0 das Infimum aller $t \in [0, 1]$ mit $(1-t)y + tz \notin A$, dann ist nicht schwer zu sehen, dass $(1-t_0)y + t_0z \in \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$, somit $W \cap (\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}) \neq \emptyset$. Es folgt

$$\mathcal{M}^k(A) \setminus \mathcal{M}_k(A) \subset \mathcal{M}^k(\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}),$$

und im Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ folgt für äußeres und inneres Volumen, dass

$$m^*(A) - m_*(A) \leq m^*(\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}) = 0.$$

Also ist A selbst Jordan-messbar. \square

1.7. Bemerkung. Diese Proposition gibt eine sehr einfache Charakterisierung von Jordan-Messbarkeit, sobald man weiß, welche Mengen Jordan-Nullmengen sind. Wenn man zum Beispiel zeigt, dass m -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n für $m < n$ Nullmengen sind, folgt, dass beschränkte Teilmengen des \mathbb{R}^n messbar sind, wenn ihr topologischer Rand in einer endlichen Vereinigung von $(n-1)$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten enthalten ist.

Außerdem können wir jetzt einen kurzen Vergleich mit dem Lebesgue-Integral aus der Analysis III geben. Jede Jordan-messbare Menge ist auch Lebesgue-messbar, es gibt aber viele Lebesgue-messbare Mengen, deren Ränder

keine Nullmengen sind, und die daher auch nicht Jordan-messbar sind. Beispielsweise ist die Menge $B = [0, 1]^n \cap \mathbb{Q}^n$ wie in Beispiel 1.2 (3) eine Lebesgue-Nullmenge. Das liegt daran, dass B eine abzählbare Vereinigung von einpunktigen Mengen ist; diese sind Nullmengen, und eine abzählbare Vereinigung von (Lebesgue-) Nullmengen ist wieder eine Lebesgue-Nullmenge. Auf der anderen Seite ist der Rand $\overline{B} \setminus \overset{\circ}{B} = [0, 1]^n$ von B keine Nullmenge.

2. Das Riemann-Integral

Analog zum Jordan-Volumen definieren wir jetzt das Riemann-Integral für Funktionen auf dem \mathbb{R}^n . Dabei folgen wir Darboux's Methode der Ober- und Untersummen.

2.1. Definition. Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Der *Träger* von f ist die Menge

$$\text{supp } f = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ existiert } y \in \mathbb{R}^n \right. \\ \left. \text{mit } \|y - x\| < \varepsilon \text{ und } f(y) \neq 0 \right\}.$$

Eine Funktion f hat *kompakten Träger*, wenn $\text{supp } f \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist.

Nach Konstruktion ist $\text{supp } f$ der Abschluss der Menge

$$f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(\{0\}).$$

Insbesondere ist der Träger kompakt, sobald die obige Menge beschränkt ist.

Wir betrachten wieder die Würfel aus (1.1). Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit kompaktem Träger. Für jeden Würfel $W \in \mathcal{W}_k^n$ betrachten wir

$$\inf_W f = \inf_{x \in W} f(x) \quad \text{und} \quad \sup_W f = \sup_{x \in W} f(x).$$

Da f beschränkt ist, sind beide Zahlen endlich. Da f kompakten Träger hat, gibt es nur endlich viele Würfel $W \in \mathcal{W}_k^n$ mit $W \cap \text{supp } f \neq \emptyset$; für alle anderen Würfel W gilt $\inf_W f = \sup_W f = 0$. Daher können wir die k -te *Untersumme* und die k -te *Obersumme* von f definieren als

$$s_k(f) = \sum_{W \in \mathcal{W}_k^n} 2^{-nk} \inf_W f \quad \text{und} \quad s^k(f) = \sum_{W \in \mathcal{W}_k^n} 2^{-nk} \sup_W f.$$

Wie beim eindimensionalen Riemann-Integral beschreibt jeder einzelne Summand das „Volumen mit Vorzeichen“ eines Quaders mit Grundfläche W und Höhe $\inf_W f$ beziehungsweise $\sup_W f$.

Beim Übergang $k \rightsquigarrow k+1$ zerteilen wir jeden Würfel $W \in \mathcal{W}_k^n$ wieder in 2^n kleinere Würfel. Auf jedem dieser kleineren Würfel W' gilt

$$\inf_{W'} f \geq \inf_W f \quad \text{und} \quad \sup_{W'} f \leq \sup_W f.$$

Wie beim eindimensionalen Riemann-Integral folgt

$$s_k(f) \leq s_{k+1}(f) \leq s^{k+1}(f) \leq s^k(f).$$

Also sind die Folgen $(s_k(f))_{k \in \mathbb{N}}$ und $(s^k(f))_{k \in \mathbb{N}}$ monoton und beschränkt, und haben daher einen Grenzwert in \mathbb{R} .

Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, dann definieren wir die *Indikatorfunktion* von A durch

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

2.2. Definition. Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit kompaktem Träger. Dann definieren wir das *untere* und das *obere Darboux Integral* durch

$$\int_{\underline{\mathbb{R}^n}} f(x) d^n x = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(f) \quad \text{und} \quad \int_{\overline{\mathbb{R}^n}} f(x) d^n x = \lim_{k \rightarrow \infty} s^k(f).$$

Die Funktion f heißt *Riemann- (Darboux-) integrierbar*, wenn Ober- und Unterintegral übereinstimmen; in diesem Fall ist das Riemann-Darboux-Integral definiert durch

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n(x) = \int_{\underline{\mathbb{R}^n}} f(x) d^n x = \int_{\overline{\mathbb{R}^n}} f(x) d^n x.$$

Wenn A Jordan-messbar und $\mathbf{1}_A \cdot f$ integrierbar ist, heißt f *über A Riemann- (Darboux-) integrierbar*, und wir definieren das Riemann- (Darboux-) Integral von f *über A* als

$$\int_A f(x) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_A(x) f(x) d^n x.$$

Man beachte, dass die Funktion $\mathbf{1}_A f$ auf A mit f übereinstimmt und außerhalb von A verschwindet. Im Ausdruck $\int_A f(x) d^n x$ heißt A der *Integrationsbereich*, $f(x)$ der *Integrand* und $d^n x$ das (*n -dimensionale Riemann-) Volumenelement*. Wir schreiben das Volumenelement stets hinter dem Integranden und betrachten Integration als „Punktrechnung“, das heißt, Summen im Integranden sind zu klammern, Produkte jedoch nicht. Die Variable x in $d^n x$ heißt auch *Integrationsvariable*; sie ist nur zwischen dem Integralzeichen \int_A und dem Volumenelement $d^n x$ definiert und sollte außerhalb dieses Bereichs nicht vorkommen.

Für die folgende Proposition erinnern wir uns an den Begriff der *gleichmäßigen Konvergenz*: eine Folge von Funktionen $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf $A \subset \mathbb{R}^n$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $i_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|f_i(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in A$ und alle $i \geq i_0$ gilt.

2.3. Proposition. *Das Riemann-Darboux-Integral hat folgende Eigenschaften.*

- (1) *Monotonie: Seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ über A integrierbar mit $f \leq g$ auf ganz A , dann gilt*

$$\int_A f(x) d^n x \leq \int_A g(x) d^n x.$$

- (2) Linearität im Integranden: Seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ über A integrierbar und $r, s \in \mathbb{R}$, dann ist auch $rf + sg$ über A integrierbar mit

$$\int_A (rf + sg)(x) d^n x = r \int_A f(x) d^n x + s \int_A g(x) d^n x .$$

- (3) Additivität im Integrationsbereich: Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ disjunkte Teilmengen. Wenn f über zwei der drei Teilmengen A, B und $A \dot{\cup} B$ integrierbar ist, dann auch über die dritte, mit

$$\int_{A \dot{\cup} B} f(x) d^n x = \int_A f(x) d^n x + \int_B f(x) d^n x .$$

- (4) Stetigkeit: Es sei $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen, die auf A gleichmäßig gegen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Wenn A beschränkt ist und alle f_i über A integrierbar sind, dann ist auch f über A integrierbar mit

$$\int_A f(x) d^n x = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_A f_i(x) d^n x .$$

- (5) Normierung: Wenn A Jordan-messbar ist, ist die konstante Funktion 1 über A integrierbar mit

$$\int_A 1 d^n x = \text{vol}^n A .$$

BEWEIS. Zur Monotonie (1) sei $f \leq g$ auf ganz A . Für alle k und alle $W \in \mathcal{W}_k^n$ folgt

$$\inf_W (\mathbf{1}_A \cdot f) \leq \inf_W (\mathbf{1}_A \cdot g) ,$$

somit $s_k(\mathbf{1}_A \cdot f) \leq s_k(\mathbf{1}_A \cdot g)$, und daher im Grenzwert

$$\int_A f(x) d^n x = \int_{\underline{\mathbb{R}^n}} (\mathbf{1}_A \cdot f)(x) \leq \int_{\underline{\mathbb{R}^n}} (\mathbf{1}_A \cdot g)(x) = \int_A g(x) d^n x .$$

Linearität beweisen wir in zwei Schritten. Für alle k und alle $W \in \mathcal{W}_k^n$ gilt

$$\begin{aligned} \inf_W (\mathbf{1}_A \cdot f) + \inf_W (\mathbf{1}_A \cdot g) &\leq \inf_W (\mathbf{1}_A \cdot (f + g)) \\ &\leq \sup_W (\mathbf{1}_A \cdot (f + g)) \leq \sup_W (\mathbf{1}_A \cdot f) + \sup_W (\mathbf{1}_A \cdot g) . \end{aligned}$$

Daraus folgt die analoge Ungleichung für die Unter- und Obersummen. Da f und g beide über A integrierbar sind, gilt im Grenzwert

$$\begin{aligned} \int_A f(x) d^n x + \int_A g(x) d^n x &\leq \int_{\underline{A}} (f + g)(x) d^n x \\ &\leq \int_{\bar{A}} (f + g)(x) d^n x \leq \int_A f(x) d^n x + \int_A g(x) d^n x . \end{aligned}$$

Also ist $f + g$ integrierbar über A und das Integral ist additiv im Integranden.

Sei jetzt f über A integrierbar und $r \in \mathbb{R}$. Wenn $r \geq 0$ ist, gilt

$$\inf_W (\mathbf{1}_A \cdot rf) = r \inf_W (\mathbf{1}_A \cdot f) \quad \text{und} \quad \sup_W (\mathbf{1}_A \cdot rf) = r \sup_W (\mathbf{1}_A \cdot f)$$

für alle k und alle $W \in \mathcal{W}_k^n$. Falls $r < 0$ ist, gilt stattdessen

$$\inf_W(\mathbf{1}_A \cdot rf) = r \sup_W(\mathbf{1}_A \cdot f) \quad \text{und} \quad \sup_W(\mathbf{1}_A \cdot rf) = r \inf_W(\mathbf{1}_A \cdot f).$$

Entsprechende Gleichungen gelten für die Unter- und Obersummen. Im Grenzwert $k \rightarrow \infty$ folgt in beiden Fällen

$$\int_A (rf)(x) d^n x = r \int_A f(x) d^n x.$$

Zusammen mit der obigen Additivität im Integranden folgt die Linearität (2).

Die Additivität (3) folgt aus der Linearität (2), denn

$$\mathbf{1}_{A \cup B} \cdot f = \mathbf{1}_A \cdot f + \mathbf{1}_B \cdot f.$$

Zur Stetigkeit sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann existiert i_0 , so dass $|f_i(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $i \geq i_0$ und alle $x \in A$. Für alle $W \in \mathcal{W}_k^n$ folgt

$$\begin{aligned} \inf_W(\mathbf{1}_A \cdot f) &\geq \inf_W(\mathbf{1}_A \cdot f_i) - \varepsilon \\ \text{und} \quad \sup_W(\mathbf{1}_A \cdot f) &\leq \sup_W(\mathbf{1}_A \cdot f_i) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Entsprechende Ungleichungen gelten für die Ober- und Untersummen, und es folgt

$$\int_A f_i(x) d^n x - \varepsilon \operatorname{vol}^n(A) \leq \int_A f(x) d^n x \leq \int_A f(x) d^n x \leq \int_A f_i(x) d^n x + \varepsilon \operatorname{vol}^n(A).$$

Indem wir ε gegen 0 gehen lassen, sehen wir, dass

$$\int_A f(x) d^n x \leq \int_A f_i(x) d^n x \leq \int_A f(x) d^n x \leq \int_A f(x) d^n x.$$

Insbesondere existieren das Integral über die Grenzfunktion f und der Grenzwert der Integrale der f_i , und beide Größen sind gleich.

Der Beweis der Normierung (5) bleibt Übung. □

2.4. Bemerkung. Die obigen Eigenschaften (1)–(5) legen das Riemann-Integral $\int_A f(x) d^n x$ bereits eindeutig fest für eine große Klasse von Funktionen f (insbesondere für alle beschränkten stetigen Funktionen mit kompaktem Träger) und alle Jordan-messbaren Mengen A . Es gibt viele weitere Möglichkeiten, einer Menge und einer Funktion eine Zahl zuzordnen, so dass nur (1)–(4) gelten; ein paar davon lernen Sie in den Übungen kennen. Wir haben im letzten Abschnitt zunächst einmal das Jordan-Volumen eingeführt, auch um hier die Normierung (5) formulieren zu können.

Die Forderung nach gleichmäßiger Konvergenz in (4) lässt sich zu punktwiser Konvergenz abschwächen, wenn alle f_i gemeinsame obere und untere Schranken besitzen, aber der Beweis wird dann schwerer [2, 7.11].

2.5. Proposition. *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und Jordan-messbar, und es seien $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in A$. Dann ist die Menge*

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y \leq g(x) \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Jordan-messbar mit

$$\text{vol}^{n+1}(D) = \int_A (g(x) - f(x)) d^n x .$$

BEWEIS. Für $n = 1$ war der Beweis eine Übung. Für größere n verläuft er mit der obigen Definition des Riemann-Darboux-Integrals ganz analog. \square

2.6. Proposition. *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Jordan-messbar und es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Abschluss \overline{A} stetig, dann ist f über A Riemann-integrierbar.*

Diese Proposition gilt immer noch, wenn f auf A beschränkt und für eine Nullmenge N nur auf $A \setminus N$ stetig ist; der Beweis ist aber schwieriger [2, 7.10(1)].

BEWEIS. Da \overline{A} kompakt ist, ist $f|_{\overline{A}}$ beschränkt und sogar *gleichmäßig stetig*, das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x, y \in \overline{A}$ mit $\|y - x\| < \delta$. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben und $\delta > 0$ wie oben gewählt, dann existiert k_0 mit $2^{-k_0} \sqrt{n} < \delta$, insbesondere ist δ größer als der maximale Abstand zweier Punkte in einem Würfel $W \in \mathcal{W}_{k_0}^n$. Somit folgt

$$\sup_W(\mathbf{1}_A f) - \inf_W(\mathbf{1}_A f) = \sup_W f - \inf_W f \leq \varepsilon$$

für alle $k \geq k_0$ und alle $W \in \mathcal{M}_k(A)$. Auf Würfeln $W \in \mathcal{M}^k(A) \setminus \mathcal{M}_k(A)$ hingegen kann $\mathbf{1}_A f$ auch den Wert 0 annehmen. Es sei $f(x) \in [-C, C]$ für alle $x \in A$. Mithin gilt

$$s^k(\mathbf{1}_A f) - s_k(\mathbf{1}_A f) \leq \varepsilon m_k(A) + 2C (m^k(A) - m_k(A)) .$$

Da A Jordan-messbar ist, gilt im Grenzwert $k \rightarrow \infty$, dass

$$\int_A f(x) d^n x - \int_{\underline{A}} f(x) d^n x \leq \varepsilon \text{vol}^n(A) .$$

Da wir $\varepsilon > 0$ beliebig klein wählen können, ist f integrierbar. \square

Wir werden erst im nächsten Abschnitt lernen, wie man manche Riemann-Integrale explizit bestimmen kann. Wir können aber bereits ein paar geometrische und stochastische Anwendungen geben.

2.7. Bemerkung. Es sei ρ integrierbar über $K \subset \mathbb{R}^3$ mit $\rho(x) > 0$ für alle $x \in K$. Wir interpretieren ρ als „Dichte“ des Körpers K . Es sei $W \in \mathcal{W}_k^3$, dann geben die Summanden

$$2^{-3k} \inf_W(\mathbf{1}_K f) \quad \text{und} \quad 2^{-3k} \sup_W(\mathbf{1}_K f)$$

jeweils eine untere und eine obere Schranke für die Masse von $W \cap K$. Daher erwarten wir, dass das Integral über ρ die *Gesamtmasse* angibt, also

$$M = \int_K \rho(p) d^3 p .$$

Wir nehmen an, dass $M > 0$. Dann können wir den *Schwerpunkt* p_0 als gewichtetes Mittel über die Ortsvektoren von K bestimmen, also

$$p_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \int_K \rho(p) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d^3p = \frac{1}{M} \int_K \rho(p) \cdot p d^3p .$$

Dabei ist $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, und es wird komponentenweise integriert, das heißt, die x -Komponente x_0 der Schwerpunkts ist das Integral über $\frac{\rho(p)}{M} \cdot x$, und so weiter.

Für die nächste Rechnung nehmen wir an, dass der Schwerpunkt im Nullpunkt liegt, andernfalls ersetzen wir unten p durch $p - p_0$. Wenn wir K um die Achse durch 0 in Richtung $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit Winkelgeschwindigkeit $|v|$ drehen, wird die Geschwindigkeit im Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ durch ein Vektorfeld $X: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$X(p) = v \times p$$

beschrieben, dabei bezeichnet „ \times “ das Kreuzprodukt im \mathbb{R}^3 . Ein Punkt der Masse m in p liefert dann den *Drehimpuls*

$$\begin{aligned} L &= m p \times X(p) = m p \times (v \times p) = m (\langle p, p \rangle v - \langle v, p \rangle p) \\ &= m \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \cdot v \in \mathbb{R}^3 , \end{aligned}$$

wobei „ \cdot “ hier das Produkt einer Matrix mit einem Vektor und $\langle \ , \ \rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet. Wir erhalten den Gesamtdrehimpuls des Körpers K durch komponentenweise Integration über p , also

$$L = \int_K \rho(p) p \times X(p) d^3p = \int_K \rho(p) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} d^3p \cdot v = I \cdot v .$$

Die durch obiges Integral definierte Matrix $I \in M_3(\mathbb{R})$ heißt der *Trägheitstensor* des Körpers, sie ist stets symmetrisch und positiv definit. Der Satz von der Drehimpulserhaltung besagt, dass sich der Drehimpuls $L = I \cdot v$ bei einer Drehung um den Schwerpunkt ohne Einwirkung äußerer Kräfte nicht ändert. Da sich aber die Matrix I mit dem Körper mitdreht, können sich Drehachse $v = I^{-1} \cdot L$ und Winkelgeschwindigkeit im Laufe der Drehung durchaus mitbewegen; der Körper scheint zu taumeln. Nur wenn sich der Körper entlang eines Eigenvektors von I dreht, bleibt die Drehachse erhalten. Diese Achsen heißen Hauptachsen, daher auch der Begriff „Hauptachsentransformation“ in der linearen Algebra.

2.8. Bemerkung. Wir kommen zu einer stochastischen Anwendung. Es seien jetzt X_1, \dots, X_n Zufallsvariablen, die ihre Werte nur in einem beschränkten Bereich $K \subset \mathbb{R}^n$ annehmen. Wir wollen annehmen, dass die Wahrscheinlichkeiten, mit der die Zufallsvariablen gewisse Werte annehmen, von einer Dichte $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p(x) \geq 0$ für alle $x \in K$ erzeugt wird. In einfachen stochastischen Modellen ist die Dichte stetig. Das heißt, sei $A \subset K$ Jordan-messbar, dann gilt

$$P(A) = P((X_1, \dots, X_n) \in A) = \int_A p(x) d^n x .$$

Solche Wahrscheinlichkeiten sind additiv, denn seien A, B messbar und disjunkt, dann folgt

$$P(A \dot{\cup} B) = P(A) + P(B) .$$

Da die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 sein soll, erhalten wir die Bedingung

$$\int_K p(x) d^n x = 1 .$$

Mit Hilfe uneigentlicher Integrale (siehe nächster Abschnitt) können wir auch unbeschränkte Bereiche, zum Beispiel $K = \mathbb{R}^n$, zulassen.

Dem obigen Schwerpunkt entspricht hier der *Erwartungswert*

$$E(X_1, \dots, X_n) = (E(X_1), \dots, E(X_n)) = \int_K p(x) x d^n x ,$$

wobei das Integral wieder komponentenweise gebildet wird. Wenn man das zugrundeliegende Zufallsexperiment sehr oft wiederholt, konvergiert der Mittelwert der einzelnen Ergebnisse fast sicher gegen den Erwartungswert.

Für die nächste Rechnung nehmen wir der Einfachheit halber an, dass der obige Erwartungswert der Nullpunkt im \mathbb{R}^n ist. Dann definieren wir die *Kovarianzmatrix* als

$$E \begin{pmatrix} X_1^2 & \dots & X_1 X_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n X_1 & \dots & X_n^2 \end{pmatrix} = \int_K p(x) \begin{pmatrix} X_1^2 & \dots & X_1 X_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n X_1 & \dots & X_n^2 \end{pmatrix} d^n x \in M_n(\mathbb{R}) .$$

Die Diagonaleinträge heißen die *Varianzen* $\text{Var}(X_i)$ der Zufallsvariablen X_i , ihre Wurzeln sind die *Streuungen* $\sigma(X_i)$. Je kleiner $\sigma(X_i)$, desto stärker konzentrieren sich die Werte von X_i um den Erwartungswert $E(X_i) = 0$. Die anderen Einträge heißen *Kovarianzen*. Wenn zwei Zufallsvariablen X_i, X_j mit $i \neq j$ *stochastisch unabhängig* sind, wenn also

$$\begin{aligned} P(\{(X_1, \dots, X_n) \mid X_i \in I, X_j \in J\}) \\ = P(\{(X_1, \dots, X_n) \mid X_i \in I\}) \cdot P(\{(X_1, \dots, X_n) \mid X_j \in J\}) \end{aligned}$$

für alle Intervalle $I, J \subset \mathbb{R}$ gilt, dann ist die Kovarianz $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$. Aus der Kovarianzmatrix ergibt sich der *Korrelationskoeffizient*

$$\rho(X_i, X_j) = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sigma(X_i) \sigma(X_j)} \in [-1, 1] .$$

Ist er positiv, so tendieren X_i und X_j in dieselbe Richtung, ist er negativ, so tendieren X_i und X_j in entgegengesetzte Richtung. Wenn X_i, X_j stochastisch unabhängig sind, verschwindet der Korrelationskoeffizient.

3. Parameterintegrale, uneigentliche Integrale

In diesem Abschnitt beweisen wir weitere Eigenschaften des Riemann-Integrals, verallgemeinern es auf unbeschränkte Funktionen und Integrationsbereiche, und führen vor, wie man manche Riemann-Integrale sogar ausrechnen kann.

Unter einem *Parameterintegral* verstehen wir einen Ausdruck der Form

$$y \mapsto \int_A f(x, y) d^n x ,$$

wobei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ sei, und $f: \mathbb{R}^n \times B \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Existenz und der Wert des Integrals hängt von der Wahl des *Parameters* $y \in B$ ab.

3.1. Proposition. *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Jordan-messbar, $B \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f: \bar{A} \times B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch die Funktion $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, für die*

$$g(y) = \int_A f(x, y) d^n x .$$

BEWEIS. Es reicht zu zeigen, dass g an jedem Punkt $y \in B$ stetig ist. Das ist wiederum äquivalent dazu, dass g bei y *folgenstetig* ist, das heißt, es gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g(y_i) = g(y) \quad \text{für alle Folgen } (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ in } B \text{ mit } \lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y .$$

Da B offen ist, finden wir eine kompakte Umgebung $K \subset B$ von y , beispielsweise einen abgeschlossenen Ball um y mit hinreichend kleinem Radius $r > 0$, und es reicht, Folgen in K zu betrachten.

Da $A \times K$ kompakt ist, ist $f|_{A \times K}$ gleichmäßig stetig. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(u, z) - f(x, y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } (x, y), (u, z) \text{ mit } \|(u - x, z - y)\| < \delta .$$

Wenn die Folge y_i gegen y konvergiert, existiert zum obigen δ ein $i_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|(0 - 0, y_i - y)\| = \|y_i - y\| \leq \delta \quad \text{für alle } x \in A \text{ und alle } i \in \mathbb{N} \text{ mit } i \geq i_0 .$$

Wir betrachten die Funktionen h_i und $h: A \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h_i(x) = f(x, y_i) \quad \text{und} \quad h(x) = f(x, y) ,$$

dann konvergiert die Folge h_i gleichmäßig gegen h . Aus Proposition 2.3 (4) folgt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g(y_i) = \int_{i \rightarrow \infty} \int_A h_i(x) d^n x = \int_A h(x) d^n x = g(y) . \quad \square$$

3.2. Proposition. *Es seien A, B, f und g wie in Proposition 3.1. Wenn f auf einer Umgebung von $\bar{A} \times B$ stetig differenzierbar ist, dann ist g auf B stetig differenzierbar mit*

$$\frac{\partial g}{\partial y_j}(y) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y) d^n x .$$

BEWEIS. Es sei e_j der j -te Einheitsvektor im \mathbb{R}^m . Nach Definition der partiellen Ableitung und wegen Linearität des Integrals gilt

$$\frac{\partial g}{\partial y_j}(y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(y + h e_j) - g(y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_A \frac{f(x, y + h e_j) - f(x, y)}{h} d^n x .$$

Wir betrachten den Integranden für den Moment als Funktion von h , dann folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, dass

$$\frac{f(x, y + h e_j) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_{h=h_{x,y}}(x, y + h e_j) = \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y + t_{h,x,y} e_j)$$

für ein $t_{h,x,y} \in (0, h)$, das von h , x und y abhängt.

Wir wählen $y \in B$ und eine kompakte Umgebung $K \subset B$ von y wie oben. Da f stetig differenzierbar und $\bar{A} \times K$ ist, ist die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ gleichmäßig stetig auf $\bar{A} \times K$. Mit einem ähnlichen Argument wie im Beweis von Proposition 3.1 folgt für jede Nullfolge $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$, dass die Folge von Funktionen

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y + t_{h_i, x, y} e_j)$$

gleichmäßig gegen die Funktion

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y)$$

konvergiert. Wir fahren fort wie im obigen Beweis und erhalten schließlich

$$\frac{\partial g}{\partial y_j}(y) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_A \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y + t_{h_i, x, y} e_j) d^n x = \int_A \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y) d^n x.$$

Die Stetigkeit der partiellen Ableitungen von g folgt aus Proposition 3.1, angewandt auf $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ anstelle von f . \square

3.3. Satz (Fubini). *Es sei $f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z) d^{n+m} z = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d^n x \right) d^m y = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d^n x \right) d^m y.$$

In der obigen Gleichung steht z also für das Paar (x, y) . Die Funktion f wird zunächst nur in Richtung von $x \in \mathbb{R}^n$ integriert, das Ergebnis hängt von y ab und wird über \mathbb{R}^m integriert. Da wir nicht wissen, ob das Riemann-Integral über \mathbb{R}^n für alle $y \in \mathbb{R}^m$ existiert, benutzen wir das untere beziehungsweise obere Darboux-Integral. Der Satz besagt unter anderem, dass für beide Darboux-Integrale das anschließende Integral über \mathbb{R}^m existiert und beidesmal das gleiche Ergebnis herauskommt.

BEWEIS. Es sei $W \in \mathcal{W}_k^{n+m}$, dann existieren Würfel $W' \in \mathcal{W}_k^n$ und $W'' \in \mathcal{W}_k^m$ mit $W = W' \times W''$, so dass $\mathcal{W}_k^{n+m} = \mathcal{W}_k^n \times \mathcal{W}_k^m$. Sei nun $y_0 \in W''$, dann gilt

$$\inf_{(x,y) \in W} f(x, y) \leq \inf_{x \in W'} f(x, y_0) \leq \sup_{x \in W'} f(x, y_0) \leq \sup_{(x,y) \in W} f(x, y).$$

Daraus erhalten wir die folgende Kette von Ungleichungen

$$\begin{aligned}
s_k(f) &= \sum_{W'' \in \mathcal{W}_k^m} \sum_{W' \in \mathcal{W}_k^n} 2^{-(n+m)k} \inf_{(x,y) \in W' \times W''} f(x,y) \\
&\leq \sum_{W'' \in \mathcal{W}_k^m} 2^{-nk} \inf_{y \in W''} \sum_{W' \in \mathcal{W}_k^n} 2^{-mk} \inf_{x \in W'} f(x,y) \\
&= s_k\left(y \mapsto s_k(f(\cdot, y))\right) \leq s_k\left(y \mapsto \int_{\underline{\mathbb{R}^n}} f(x,y) d^n x\right) \\
(*) \quad &\leq s^k\left(y \mapsto \int_{\underline{\mathbb{R}^n}} f(x,y) d^n x\right) \\
&\leq s^k\left(y \mapsto \int_{\overline{\mathbb{R}^n}} f(x,y) d^n x\right) \leq s^k\left(y \mapsto s^k(f(\cdot, y))\right) \leq s^k(f).
\end{aligned}$$

Da f integrierbar ist, konvergieren die linke und die rechte Seite für $k \rightarrow \infty$ gegen denselben Wert. Also konvergieren auch die mittleren Ausdrücke. Insbesondere ist $\int_{\underline{\mathbb{R}^n}} f(x,y) d^n x$ über \mathbb{R}^m integrierbar, und genauso ist $\int_{\overline{\mathbb{R}^n}} f(x,y) d^n x$ über \mathbb{R}^m integrierbar, indem wir in (*) die Ober- durch die Untersumme und das Unter- durch das Oberintegral ersetzen, und beide Integrale stimmen wie behauptet mit dem Integral von f über \mathbb{R}^{n+m} überein. \square

3.4. Folgerung (aus dem Satz 3.3 von Fubini). *Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und Riemann-integrierbar. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1.$$

Da hier mehrfach nacheinander integriert werden muss, nennt man mehrdimensionale Riemann-Integrale auch „Mehrfachintegrale“. Jedes einzelne Integral ist eindimensional und kann, wenn der Integrand entsprechend gutartig ist, durch das Bestimmen einer Stammfunktion mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung berechnet werden. Dabei beginnt man mit dem innersten Integral und arbeitet sich nach außen vor.

BEWEIS. Wir definieren durch Induktion über $k = 1, \dots, n$ Funktionen

$$f_k: (x_{k+1}, \dots, x_n) \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(x) d^k(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{k-1}(x_k, \dots, x_n) dx_k,$$

wobei $f_0 = f$. Dabei folgt die behauptete Gleichheit aus dem Satz von Fubini (mit $k-1$ und 1 anstelle von n und m), wobei wir benutzen, dass das innere Integral nach Proposition 2.6 für alle (x_k, \dots, x_n) existiert, da f_{k-1} nach Induktion über k stetig ist und kompakten Träger hat: Die Stetigkeit von f_k folgt aus Proposition 3.1, und der Träger von f_k ist beschränkt, da

$$\text{supp } f_k \subset \{(x_{k+1}, \dots, x_n) \mid \text{es gibt } x_k \text{ mit } (x_k, \dots, x_n) \in \text{supp } f_{k-1}\}.$$

Dann ist $f_n \in \mathbb{R}$ das gesuchte Mehrfachintegral, und induktiv folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x = \dots = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1. \quad \square$$

3.5. Beispiel. Wir bestimmen das Volumen eines Oktaeders

$$O = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| \leq 1 \} .$$

Dazu werden wir benutzen, dass jeder der acht Bereiche $O \cap ((\pm\mathbb{R}_+) \times (\pm\mathbb{R}_+) \times (\pm\mathbb{R}_+))$ das gleiche Volumen hat. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{vol}^3(O) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_O(p) d^3p = \int_{-1}^1 \int_{|x|-1}^{1-|x|} \int_{|x|+|y|-1}^{1-|x|-|y|} dz dy dx \\ &= 8 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 8(1-x-y) dy dx \\ &= \int_0^1 (8(1-x)^2 - 4(1-x)^2) dx = \frac{4}{3} . \end{aligned}$$

3.6. Folgerung (Cavalierisches Prinzip). *Zwei Jordan-messbare Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ haben das gleiche Volumen, wenn für alle $h \in \mathbb{R}$ die Querschnitte $A \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{h\})$ und $B \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{h\})$ ebenfalls Jordan-messbar sind und das gleiche Volumen haben.*

BEWEIS. Wir wenden den Satz von Fubini an und erhalten mit der Normierung aus Proposition 2.3 (5), dass

$$\begin{aligned} \text{vol}^n A &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_A(x) d^n x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbf{1}_A(y, h) d^{n-1} y dh \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{vol}^{n-1}(A \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{h\})) dh , \end{aligned}$$

dabei ist $x = (y, h)$ mit $y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Das analoge gilt für B . \square

3.7. Beispiel. Wir wollen das Volumen der dreidimensionalen Einheitskugel $B^3 \subset \mathbb{R}^3$ bestimmen. Dazu betrachten wir die obere Halbkugel H , den umgekehrten Kegel K und den Zylinder Z mit

$$\begin{aligned} H &= \{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 \text{ und } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{1 - z^2} \} , \\ K &= \{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 \text{ und } \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \} \\ \text{und } Z &= \{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 \text{ und } \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \} \end{aligned}$$

Als Querschnitt in der Höhe z erhalten wir Kreise mit den Radien $\sqrt{1 - z^2}$, z und 1, somit gilt für die Kreisflächen

$$\pi(1 - z^2) + \pi z^2 = \pi .$$

Aus dem Cavalierischen Prinzip folgt

$$\text{vol}^3(H) + \text{vol}^3(K) = \text{vol}^3(Z) = \int_0^1 \pi dz = \pi ,$$

und das Volumen von Kegeln berechnen wir in den Übungen.

Wir kommen zu uneigentlichen Integralen. Das heißt, weder Integrationsbereich $A \subset \mathbb{R}^n$ noch der Integrand f müssen beschränkt sein. Wir betrachten

$$\mathcal{K}(A, f) = \left\{ B \subset A \mid B \text{ ist Jordan-messbar, } f \text{ ist integrierbar über } B \right\}.$$

Den abgeschlossenen Ball um 0 vom Radius r bezeichnen wir mit $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$. Eine zu f passende Ausschöpfung von A ist eine Folge $(C_i)_i$ von Mengen aus $\mathcal{K}(A, f)$ mit $C_i \subset C_{i+1}$ für alle i , so dass

$$\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right) \cap B_r \subset \mathbb{R}^n$$

für alle $r > 0$ eine Nullmenge ist. Wenn eine solche Ausschöpfung existiert, folgt aus Proposition 1.6 insbesondere, dass $A \cap B_r$ für alle $r > 0$ messbar ist.

3.8. Definition. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so dass eine zu f passende Ausschöpfung von A existiert. Wir nennen f *uneigentlich (Riemann-) integrierbar* über A mit dem uneigentlichen Integral

$$\int_A f(x) d^n x = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{C_i} f(x) d^n x,$$

wenn sich für alle passenden Ausschöpfungen $(C_i)_i$ der gleiche Grenzwert ergibt.

Wir nennen eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ *lokal (Jordan-) messbar*, wenn $A \cap B_r(0)$ für alle $r > 0$ messbar ist. Wenn $\mathbf{1}_A$ über \mathbb{R}^n uneigentlich integrierbar ist, definieren wir das *uneigentliche (Jordan-) Volumen* durch

$$\text{vol}^n A = \int_A \mathbf{1}_A(x) d^n x.$$

Um ein Kriterium für uneigentliche Integrierbarkeit zu finden, betrachten wir den *Positivteil* f_+ und den *Negativteil* f_- von f mit

$$f_+(x) = \max(f(x), 0) \quad \text{und} \quad f_-(x) = \max(-f(x), 0).$$

Insbesondere sind f_+ und f_- nichtnegativ, und es gilt $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$. Man kann leicht überprüfen, dass

$$\begin{aligned} s^k(\mathbf{1}_K f_+) - s_k(\mathbf{1}_K f_+) &\leq s^k(\mathbf{1}_K f) - s_k(\mathbf{1}_K f) \\ \text{und} \quad s^k(\mathbf{1}_K f_-) - s_k(\mathbf{1}_K f_-) &\leq s^k(\mathbf{1}_K f) - s_k(\mathbf{1}_K f) \end{aligned}$$

für jede Menge $K \in \mathcal{K}(A, f)$. Also sind f_+ und f_- integrierbar über K . Daraus folgt insbesondere, dass $\mathcal{K}(A, f) \subset \mathcal{K}(A, f_+)$ und $\mathcal{K}(A, f) \subset \mathcal{K}(A, f_-)$, insbesondere passt jede zu f passende Ausschöpfung auch zu f_+ und f_- .

3.9. Proposition. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so dass eine zu f passende Ausschöpfung von A existiert. Dann sind äquivalent

- (1) Für eine zu f_+ passende Ausschöpfung $(C_i^+)_i$ und eine zu f_- passende Ausschöpfung $(C_i^-)_i$ existieren

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{C_i^+} f_+(x) d^n x < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{C_i^-} f_-(x) d^n x < \infty.$$

(2) Es gibt eine Konstante C , so dass für alle $K \in \mathcal{K}(A, f)$ gilt

$$\int_K f_+(x) d^n x \leq C \quad \text{und} \quad \int_K f_-(x) d^n x \leq C .$$

Wenn eine dieser äquivalenten Bedingungen gilt, ist f uneigentlich über A integrierbar.

BEWEIS. Aus (1) folgt (2), denn sei $K \in \mathcal{K}(A, f_+)$, und sei f_+ auf K beschränkt durch $M > 0$. Da K beschränkt ist, existiert ein i_0 mit

$$\text{vol}^n(K \setminus C_i^+) < \frac{\varepsilon}{M}$$

für alle $i \geq i_0$, und es folgt

$$\int_K f_+(x) d^n x \leq \int_{C_i^+ \cap K} f_+(x) d^n x + \varepsilon \leq \int_{C_i^+} f_+(x) d^n x + \varepsilon .$$

Indem wir ε beliebig klein wählen, sehen wir, dass

$$(*) \quad \int_K f_+(x) d^n x \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{C_i^+} f_+(x) d^n x .$$

Die analoge Aussage gilt für f_- .

Umgekehrt folgt (1) aus (2). Dazu sei zunächst

$$S_+ = \sup_{K \in \mathcal{K}(A, f)} \int_K f_+(x) d^n x \quad \text{und} \quad S_- = \sup_{K \in \mathcal{K}(A, f)} \int_K f_-(x) d^n x .$$

Für jede zu f passende Ausschöpfung $(C_i)_i$ sind die Folgen

$$\left(\int_{C_i} f_+(x) d^n x \right)_i \quad \text{und} \quad \left(\int_{C_i} f_-(x) d^n x \right)_i$$

monoton und durch S_{\pm} beschränkt, also existieren ihre Grenzwerte I_{\pm} mit $I_+ \leq S_+$ und $I_- \leq S_-$, und es gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{C_i} f(x) d^n x = I_+ - I_- .$$

Damit ist die Äquivalenz der beiden Aussagen bewiesen.

Aus dem obigen Argument folgt mit (*) aber sogar $I_+ = S_+$ und $I_- = S_-$ unabhängig von der Wahl von $(C_i)_i$. Dabei dürfen wir (*) anwenden, da jede zu f passende Ausschöpfung $(C_i)_i$ auch zu f_+ und f_- passt. Daraus folgt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{C_i} f(x) d^n x = S_+ - S_-$$

unabhängig von der Wahl von $(C_i)_i$, also ist f uneigentlich integrierbar über A . \square

3.10. Bemerkung. In Wirklichkeit sind die obigen Bedingungen (1)–(2) sogar äquivalent zur uneigentlichen Integrierbarkeit. Also ist unsere Definition strenger als die übliche Definition des uneigentlichen Integrals im Eindimensionalen. Beispielsweise ist die Funktion

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

in unserem Sinne nicht integrierbar, denn sei

$$K_i = \bigcup_{j=0}^i [2j\pi, (2j+1)\pi] ,$$

dann lässt sich aus der Divergenz der harmonischen Reihe folgern, dass

$$\sup_{K \in \mathcal{K}(A, f)} \geq \sup_{i \rightarrow \infty} \int_{K_i} \frac{\sin x}{x} dx = \infty .$$

Im Eindimensionalen würden wir solche Mengen K_i jedoch nicht betrachten, sondern nur zusammenhängende Intervalle. Und dann besagt eine Variante des Leibniz-Kriteriums, dass das Integral von f über alle Intervalle beschränkt ist und das uneigentliche Integral existiert.

Das uneigentliche Integral erfüllt die Eigenschaften (1)–(3) und (5) aus Proposition 2.3. Stetigkeit bei gleichmäßiger Konvergenz gilt jedoch nicht mehr. Auch der Satz von Fubini gilt nur noch unter Zusatzvoraussetzungen.

Der Vollständigkeit halber geben wir einen Beweis dafür, dass uneigentliche Integrierbarkeit Bedingung (2) impliziert. Wir definieren für jede Menge $K \in \mathcal{K}(A, f)$ und für alle k je drei Jordan-messbare Teilmengen

$$\begin{aligned} P_k(K) &= \{ x \in K \mid \text{es gibt } W \in \mathcal{W}_k^n \text{ mit } x \in W \text{ und } \mathbf{1}_A f|_W \geq 0 \} , \\ N_k(K) &= \{ x \in K \mid \text{es gibt } W \in \mathcal{W}_k^n \text{ mit } x \in W \text{ und } \mathbf{1}_A f|_W \leq 0 \} , \\ \text{und } R_k(K) &= K \setminus (P_k(K) \cup N_k(K)) . \end{aligned}$$

Es folgt $P_k(K), N_k(K), R_k(K) \in \mathcal{K}(A, f)$. Für $K, L \in \mathcal{K}(A, f)$ mit $K \subset L$ gilt $P_k(K) \subset P_k(L)$ und $N_k(K) \subset N_k(L)$ wenn $k \leq \ell$. Auf dem Durchschnitt $P_k(K) \cap N_k(K)$ verschwindet f .

Auf jedem Würfel $W \in \mathcal{W}_k^n$ mit $W \cap R_k(K) \neq \emptyset$ nimmt f sowohl positive als auch negative Werte an. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{R_k(K)} f_+(x) d^n x + \int_{R_k(K)} f_-(x) d^n x \\ \leq s^k(\mathbf{1}_{R_k(K)} f) - s_k(\mathbf{1}_{R_k(K)} f) \leq s^k(\mathbf{1}_K f) - s_k(\mathbf{1}_K f) . \end{aligned}$$

Da f über K integrierbar ist, verschwindet die rechte Seite im Limes $k \rightarrow \infty$. Wir haben also K in Abhängigkeit von k in drei Bereiche zerlegt: auf $P_k(K)$ ist $f \geq 0$, auf $N_k(K)$ ist $f \leq 0$, und für den Rest $R_k(K)$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{R_k(K)} f_+(x) d^n x = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{R_k(K)} f_-(x) d^n x = 0 .$$

Sei jetzt (2) verletzt, etwa existiere zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $K \in \mathcal{K}(A, f)$ mit

$$\int_K f_+(x) d^n x \geq m .$$

Dann starten wir mit einer passenden Ausschöpfung $(C_i)_i$. Nach Übergang zu einer Teilfolge mit $C_0 = \emptyset$ dürfen wir annehmen, dass

$$\int_{C_i} f_+(x) d^n x \geq i .$$

Wir finden eine schwach monoton wachsende Folge $(j_i)_i$ in \mathbb{N} mit $\lim_{i \rightarrow \infty} j_i = \infty$, so dass $j_i \leq i$ und

$$\int_{C_{j_i}} f_-(x) d^n x \leq \frac{i}{2} .$$

schließlich wählen wir eine monoton wachsende Folge $(k_i)_i$ so, dass

$$\int_{R_{k_i}(C_i)} (f_+ + f_-)(x) d^n x \leq 1$$

für alle i . Dann betrachten wir die Folge $(D_i)_i$ in $\mathcal{K}(A, f)$ mit

$$D_i = P_{k_i}(C_i) \cup C_{j_i} .$$

Da $j_i \rightarrow \infty$ für $i \rightarrow \infty$, und da $P_{k_i}(C_i) \subset P_{k_{i+1}}(C_{i+1})$, ist das eine Ausschöpfung. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{D_i} f(x) d^n x &\geq \int_{C_i} f_+(x) d^n x - \int_{R_{k_i}(C_i)} f_+(x) d^n x - \int_{C_{j_i}} f_-(x) d^n x \\ &\geq i - 1 - \frac{i}{2} , \end{aligned}$$

somit existiert der Grenzwert in (1) für die Ausschöpfung $(D_i)_i$ nicht. Wenn außerdem auch das Integral von f_- über $K \in (A, f)$ unbeschränkt ist, dann kann man das obige Verfahren so variieren, dass $\int_{D_i} f(x) d^n x$ gegen jeden beliebigen Wert in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvergiert.

4. Die Transformationsformel

Zur Erinnerung: sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, dann heißt F *Lipschitz-stetig* mit *Lipschitz-Konstante* L , wenn

$$(1) \quad \|F(y) - F(x)\| \leq L \|y - x\| \quad \text{für alle } x, y \in A .$$

Es sei jetzt A im Punkt $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ differenzierbar. Dann existiert eine lineare Abbildung $dF(x_0) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ mit

$$(2) \quad F(x) = F(x_0) + dF(x_0) \cdot (x - x_0) + R(x) \quad \text{für alle } x \in A ,$$

wobei zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$(3) \quad \|R(x)\| \leq \varepsilon \|x - x_0\| \quad \text{für alle } x \in A \text{ mit } \|x - x_0\| < \delta .$$

Wenn F Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L und in x_0 differenzierbar ist, dann folgt

$$(4) \quad \|df(x_0) \cdot v\| \leq L \|v\| \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n .$$

Wir betrachten die *Linearisierung* F_0 von F bei x_0 mit

$$(5) \quad F_0(x) = F(x_0) + dF(x_0) \cdot (x - x_0) .$$

Sei jetzt $W \subset \mathbb{R}^n$ ein Würfel. Dann erinnern wir uns, dass nach Konstruktion der *Determinante* gilt, dass

$$(6) \quad \text{vol}^n(F_0(W)) = \text{vol}^n(dF(x_0) \cdot W) = |\det dF(x_0)| \text{vol}^n W .$$

Außerdem erinnern wir uns an das äußere Volumen m^* aus Definition 1.1 (1).

4.1. Proposition. *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Jordan-messbar, und es sei $F: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig und $F|_{\mathring{A}}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$m^*(F(A)) \leq \int_A |\det dF(x)| d^n x .$$

Der Ausdruck $|\det dF(x)|$ heißt auch *Jacobi-Determinante*. Er gibt den Faktor an, um den die Abbildung F nahe x Volumina verzerrt.

BEWEIS. Wir beweisen eine analoge Aussage zunächst für den Fall eines Würfels $W \in \mathcal{W}_k^n$ mit $\bar{W} \subset \mathring{A}$, und zwar durch Widerspruch. Dazu nehmen wir an, dass ein $W_k \in \mathcal{W}_k^n$ und eine Zahl $c > 0$ existiert, so dass

$$(*) \quad m^*(F(W_k)) \geq \int_{W_k} |\det dF(x)| d^n x + c \text{vol}^n(W_k) .$$

Da $dF: \mathring{A} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ nach Voraussetzung stetig und wegen (4) auch beschränkt ist, existiert das Integral nach Proposition 2.6. Wir zerlegen W_k in 2^n Würfel $W_{k+1} \in \mathcal{W}_{k+1}^n$. Während die Größen auf der rechten Seite strikt additiv sind, können sich die Bilder der einzelnen W_{k+1} überschneiden. Also gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{W_{k+1} \in \mathcal{M}_{k+1}(W_k)} m^*(F(W_{k+1})) \\ & \geq m^*(F(W_k)) \geq \int_{W_k} |\det dF(x)| d^n x + c \text{vol}^n(W_k) \\ & = \sum_{W_{k+1} \in \mathcal{M}_{k+1}(W_k)} \left(\int_{W_{k+1}} |\det dF(x)| d^n x + c \text{vol}^n(W_{k+1}) \right) . \end{aligned}$$

Mindestens einer dieser Würfel W_{k+1} hat dann wieder die Eigenschaft (*). Indem wir k immer weiter vergrößern, erhalten wir eine Folge von Würfeln $W_k \supset W_{k+1} \supset \dots$ mit der Eigenschaft (*). Nach dem Prinzip der Intervallschachtelung gibt es einen eindeutigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$, der im Abschluss \bar{W}_i aller W_i mit $i \geq k$ enthalten ist.

Wir wählen $\varepsilon > 0$ und erhalten $\delta > 0$ wie in (3). Der Durchmesser eines Würfels $W_\ell \in \mathcal{W}_\ell^n$ ist $2^{-\ell}\sqrt{n}$, und wir wählen $\ell_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $2^{-\ell_0}\sqrt{n} < \delta$. Es sei $\ell \geq \ell_0$ und $W_\ell \in \mathcal{W}_\ell^n$ mit $x_0 \in \overline{W}_\ell \subset \mathring{A}$, und F_0 sei die Linearisierung von F bei x_0 aus (5). Dann folgt aus (2) und (3), dass

$$F(W_\ell) \subset \{ y + z \mid y \in F_0(W_\ell) \text{ und } z \leq 2^{-\ell}\sqrt{n}\varepsilon \} .$$

Das bedeutet, dass die Abweichung zwischen den Menge $F(W_\ell)$ und $F_0(W_\ell)$ im Verhältnis zur Größe von W_ℓ durch ε begrenzt wird. Da wir $\varepsilon > 0$ beliebig klein wählen können, folgt mit (6), dass

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{m^*(F(W_\ell))}{\text{vol}^n(W_\ell)} = \frac{\text{vol}^n(F_0(W_\ell))}{\text{vol}^n(W_\ell)} = |\det dF(x_0)| .$$

Da \det und dF stetig sind, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $||\det dF(x)| - |\det dF(x_0)|| \leq \varepsilon$ für alle $x \in \mathring{A}$ mit $\|x - x_0\| < \delta$. Also gilt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol}^n(W_\ell)} \int_{W_\ell} |\det dF(x)| d^n x = |\det dF(x_0)| .$$

Insgesamt erhalten wir für die obigen Würfel $W_k \supset W_{k+1} \supset \dots$ einen Widerspruch, da

$$\begin{aligned} |\det dF(x_0)| &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{m^*(F(W_\ell))}{\text{vol}^n(W_\ell)} \\ &\geq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol}^n(W_\ell)} \int_{W_\ell} |\det dF(x)| d^n x + c = |\det dF(x_0)| + c . \end{aligned}$$

Da wir $c > 0$ beliebig klein wählen können, folgt für alle k und alle $W \in \mathcal{W}_k^n$ mit $\overline{W} \subset \mathring{A}$, dass

$$\text{vol}^n(F(W)) \leq \int_W |\det dF(x)| d^n x .$$

Für jedes k betrachten wir

$$\mathcal{R}_k = \{ W \in \mathcal{W}_k^n \mid \overline{W} \cap A \neq \emptyset \text{ und } \overline{W} \not\subset \mathring{A} \}$$

$$\text{und } R_k = \bigcup \mathcal{R}_k = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \text{es gibt } W \in \mathcal{R}_k \text{ mit } x \in W \} .$$

Es sei $W \in \mathcal{R}_k$, dann enthält \overline{W} einen Randpunkt von A . Also gilt $W' \in \mathcal{M}^k(A) \setminus \mathcal{M}_k(A)$ für mindestens einen der 3^n benachbarten Würfel (W selbst eingeschlossen). Da A messbar ist, folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}^n(R_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} 3^n \text{vol}^n(M^k(A) \setminus M_k(A)) = 0 .$$

Da jeder Würfel $W \in \mathcal{W}_k^n$ Durchmesser $2^{-k}\sqrt{n}$ hat, liegt $F(W)$ komplett in einem Würfel der Seitenlänge $2^{-k}\sqrt{n}L$ wegen der Lipschitz-Bedingung (1). Das Volumen dieses Würfels ist das $n^{\frac{n}{2}}L^n$ -fache von $\text{vol}^n W$, es folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}^n(F(R_k)) \leq n^{\frac{n}{2}} L^n \lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}^n(R_k) = 0 .$$

Da $A \setminus R_k$ eine Vereinigung von Würfeln ist, die ganz in $\overset{\circ}{A}$ liegen, folgt

$$\begin{aligned} \text{vol}^n A &= \lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}^n(A \setminus R_k) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A \setminus R_k} |\det dF(x)| d^n x \leq \int_A |\det dF(x)| d^n x. \quad \square \end{aligned}$$

Es folgt eine einfache Version der Transformationsformel, die für unsere Zwecke völlig ausreicht. Eine allgemeinere Fassung finden Sie in [2, 7.18].

4.2. Satz (Transformationsformel). *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar mit $\overline{A} \subset U$, dann ist auch $F(A) \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Dann ist $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann über $F(A)$ integrierbar, wenn $(f \circ F) \cdot |\det dF|: U \rightarrow \mathbb{R}$ über A integrierbar ist, und es gilt*

$$\int_A (f \circ F)(x) |\det dF(x)| d^n x = \int_{F(A)} f(y) d^n y.$$

BEWEIS. Als erstes zeigen wir, dass F Jordan-messbare Teilmengen von U auf Jordan-messbare Teilmengen von V abbildet. Die Abbildung F ist ein Diffeomorphismus, also auch ein Homöomorphismus. Insbesondere bildet F den topologischen Rand von A auf den topologischen Rand von $F(A)$ ab. Es folgt

$$m^*(\overline{F(A)} \setminus F(A)^\circ) = \int_{\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}} |\det dF(x)| d^n x = 0,$$

wenn die Menge A Jordan-messbar ist, denn ihr topologischer Rand $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ ist nach Proposition 1.6 eine Nullmenge. Aber dann ist der topologische Rand $\overline{F(A)} \setminus F(A)^\circ$ von $F(A)$ ebenfalls eine Nullmenge, also ist $F(A)$ nach Proposition 1.6 ebenfalls messbar.

Das folgende Argument werden wir zweimal in leicht abgewandelter Form durchführen. Im ersten Durchgang sei $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht notwendig integrierbare Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in V$. Für alle k definieren wir eine „untere Treppenfunktion“ $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_k = \sum_{W \in \mathcal{M}_k(F(A))} \inf_W f \cdot \mathbf{1}_W = \sum_{W \in \mathcal{W}_k^n} \inf_W (\mathbf{1}_{F(A)} \cdot f) \cdot \mathbf{1}_W,$$

so dass $f_k \leq \mathbf{1}_{F(A)} \cdot f$. Da \overline{A} kompakt ist, ist auch das Bild $F(\overline{A})$ unter der stetigen Abbildung F kompakt. Insbesondere ist $F(A) \subset F(\overline{A})$ beschränkt, und die obige Summe ist endlich.

Es sei $G = F^{-1}: V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung von F . Dann ist G auch ein Diffeomorphismus, und nach dem obigen Argument ist $F^{-1}(W) = G(W)$ messbar für alle $W \in \mathcal{M}_k(F(A)) \subset \mathcal{M}_k(V)$. Wegen Additivität und Monotonie

des unteren Darboux-Integrals und Proposition 4.1 folgt

$$\begin{aligned}
s_k(\mathbf{1}_{F(A)} f) &= \sum_{W \in \mathcal{M}_k(F(A))} \inf_W f \cdot \text{vol}^n(W) \\
&\leq \sum_{W \in \mathcal{M}_k(F(A))} \inf_W f \int_{F^{-1}(W)} |\det dF(x)| d^n x \\
&= \int_A (f_k \circ F)(x) |\det dF(x)| d^n x \\
&\leq \int_{\underline{A}} (f \circ F)(x) |\det dF(x)| d^n x .
\end{aligned}$$

Dabei haben wir $f \geq 0$ nur in der ersten der zwei obigen Ungleichungen benutzt. Im Grenzwert $k \rightarrow \infty$ erhalten wir die Ungleichung

$$(*) \quad \int_{\underline{F(A)}} f(y) d^n y = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(\mathbf{1}_{F(A)} f) \leq \int_{\underline{A}} (f \circ F)(x) |\det dF(x)| d^n x .$$

Es sei f nicht-negativ wie oben, dann ist auch $g = (f \circ F) \cdot |\det dF| : U \rightarrow \mathbb{R}$ nicht-negativ. Aus der Multiplikativität der Determinante und der Kettenregel für die totale Ableitung folgt

$$\begin{aligned}
(g \circ G)(y) \cdot |\det dG(y)| &= f(F(G(y))) \cdot |\det dF(G(y))| \cdot |\det dG(y)| \\
&= f(y) \cdot |\det(dF(G(y)) \cdot dG(y))| = f(y) \cdot |\det d(F \circ G)(y)| = f(y) ,
\end{aligned}$$

da $F \circ G = \text{id}_V$ und $\det d \text{id}_V = \det E_n = 1$. Wir wenden die Ungleichung (*) zweimal an und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{\underline{F(A)}} f(y) d^n y &\leq \int_{\underline{A}} (f \circ F)(x) |\det dF(x)| d^n x = \int_{\underline{G(F(A))}} g(x) d^n x \\
&\leq \int_{\underline{F(A)}} (g \circ G)(y) |\det dG(y)| d^n y = \int_{\underline{F(A)}} f(y) d^n y ,
\end{aligned}$$

also gilt sogar Gleichheit in (*). Speziell für $f = 1$ folgt

$$(\dagger) \quad \text{vol}^n(F(A)) = \int_{F(A)} d^n x = \int_A |\det dF(x)| d^n x ,$$

da 1 und $|\det dF|$ stetig und daher nach Proposition 2.6 über die messbaren Mengen $F(A)$ beziehungsweise A integrierbar sind.

Mit (\dagger) können wir den Beweis von (*) nun für beliebige f wiederholen und erhalten

$$\begin{aligned}
s_k(\mathbf{1}_{F(A)} f) &= \sum_{W \in \mathcal{M}_k(F(A))} \inf_W f \int_{F^{-1}(W)} |\det dF(x)| d^n x \\
&\leq \int_{\underline{A}} (f \circ F)(x) |\det dF(x)| d^n x .
\end{aligned}$$

Im Limes $k \rightarrow \infty$ erhalten wir (*) für alle Funktionen $f: V \rightarrow \mathbb{R}$. Indem wir (*) auf die obige Funktion $g = (f \circ F) \cdot |\det dF| : U \rightarrow \mathbb{R}$ anwenden, folgt Gleichheit. Für die oberen Darboux-Integrale gilt

$$\int_{F(A)}^{\bar{}} f(y) d^n y = - \int_{\underline{F(A)}} (-f)(y) d^n y = - \int_{\underline{A}} (-g)(x) d^n x = \int_A^{\bar{}} g(x) d^n x .$$

Aus den beiden Gleichungen

$$\int_{\underline{A}} (f \circ F)(x) |\det dF(x)| d^n x = \int_{\underline{F(A)}} f(y) d^n y$$

und

$$\int_A^{\bar{}} (f \circ F)(x) |\det dF(x)| d^n x = \int_{F(A)}^{\bar{}} f(y) d^n y$$

folgt schließlich, dass f genau dann über $F(A)$ integrierbar ist, wenn g über A integrierbar ist, und dass dann die Transformationsformel gilt. \square

Wir werden eine Variante der Transformationsformel für uneigentliche Integrale benötigen.

4.3. Folgerung. *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Wir nehmen an, dass eine Folge $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset U$ kompakter, Jordan-messbarer Teilmengen existiert, so dass*

$$(1) \quad \bigcup_i K_i = U .$$

Dann erfüllt eine Funktion $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann eine der Annahmen (1), (2) aus Proposition 3.9 für eine Teilmenge $F(A) \subset V$, wenn $(f \circ F) \cdot |\det dF|$ eine dieser Annahmen für A erfüllt; in diesem Fall gilt

$$(2) \quad \int_A (f \circ F)(x) |\det dF(x)| d^n x = \int_{F(A)} f(y) d^n y .$$

Bedingung (1) ist symmetrisch in U und V . Dazu betrachte die Mengen $L_i = F(K_i) \subset V$. Da F als Diffeomorphismus insbesondere stetig ist, ist das Bild der kompakten Menge K_i wieder kompakt, und nach Satz 4.2 auch Jordan-messbar. Außerdem gilt

$$\bigcup_i L_i = F\left(\bigcup_i K_i\right) = V .$$

Wenn wir auf Jordan-Messbarkeit der K_i verzichten, ist (1) übrigens für alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt.

Nach Bemerkung 3.10 sind die Annahmen (1), (2) aus Proposition 3.9 äquivalent zur uneigentlichen Integrierbarkeit.

BEWEIS. Wir beweisen die Richtung „ \implies “. Die Gegenrichtung „ \impliedby “ erhalten wir, indem wir die Rollen von U und V vertauschen.

Nach Voraussetzung sind die Funktionen f_+ und f_- uneigentlich integrierbar über $F(A) \subset V$. Wir wählen eine zu f_+ passende Ausschöpfung $(C_i^+)_i$

von $F(A)$, dann ist $(C_i^+ \cap L_i)_i$ ebenfalls eine zu f_+ passende Ausschöpfung von $F(A)$. Die Urbilder $F^{-1}(C_i^+ \cap L_i) = F^{-1}(C_i^+) \cap K_i$ bilden eine Ausschöpfung von A mit der Eigenschaft

$$\overline{F^{-1}(C_i^+) \cap K_i} \subset K_i \subset U,$$

so dass wir für alle i die Transformationsformel 4.2 anwenden können. Es folgt

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{F^{-1}(C_i^+) \cap K_i} (f_+ \circ F)(x) |\det dF(x)| d^n x \\ = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{C_i^+ \cap L_i} f_+(y) d^n y = \int_{F(A)} f_+(y) d^n y < \infty. \end{aligned}$$

Entsprechend verfahren wir mit f_- . Somit erfüllen die Funktionen

$$\begin{aligned} (f_+ \circ F) \cdot |\det dF| &= ((f \circ F) \cdot |\det dF|)_+ \\ \text{und} \quad (f_- \circ F) \cdot |\det dF| &= ((f \circ F) \cdot |\det dF|)_- \end{aligned}$$

die Bedingung (1) in Proposition 3.9. Also ist $(f \circ F) \cdot |\det dF|$ uneigentlich integrierbar über A , und die angegebene Formel gilt. \square

4.4. Beispiel. Wir betrachten ebene *Polarkoordinaten*

$$F: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty) \times \{0\}) \quad \text{mit} \quad F(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Für $i \geq 1$ betrachten wir die kompakten Mengen

$$K_i = \left[\frac{1}{i}, i \right] \times \left[\frac{1}{i}, 2\pi - \frac{1}{i} \right] \quad \text{mit} \quad \bigcup_i K_i = (0, \infty) \times (0, 2\pi).$$

Also können wir Folgerung 4.3 auf Polarkoordinaten anwenden.

Als nächstes bestimmen wir die Jacobi-Determinante von F als

$$|\det dF(r, \varphi)| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \right| = r.$$

Als Beispiel sei $a > -2$, und $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ bezeichne den abgeschlossenen Ball vom Radius R um 0, dann berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |z|^a d^2 z &= \int_{B_R \setminus ([0, R] \times \{0\})} (x^2 + y^2)^{\frac{a}{2}} dx dy \\ &= \int_{(0, R] \times (0, 2\pi)} r^a \cdot r d\varphi dr = 2\pi \int_0^R r^{a+1} dr = \frac{2\pi}{a+2} R^{a+2}. \end{aligned}$$

Im ersten Schritt haben wir nur eine Nullmenge im Integrationsbereich weglassen, was nach einer Übung den Wert des Integrals nicht ändert. Im letzten Schritt haben wir die Folgerung 3.4 aus dem Satz von Fubini benutzt, um das Integral auszurechnen. Für $a \leq 0$ ist das linke Integral uneigentlich, aber es existiert für alle $a > -2$. Für $a = 0$ erhalten wir das Volumen

$$\text{vol}^2(B_R) = \pi R^2.$$

4.5. Beispiel. Wir wollen jetzt das Integral über die (noch unnormierte) *Gaußsche Glockenkurve*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

ausrechnen. Dazu betrachten wir zunächst auf \mathbb{R}^2 die Funktion

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} .$$

In den Polarkoordinaten aus Beispiel 4.4 erhalten wir

$$\int_{(0, \infty) \times (0, 2\pi)} (f \circ F)(r, \varphi) r d\varphi dr = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\varphi dr .$$

Da der Integrand positiv ist, dürfen wir eine passende Ausschöpfung wählen und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\varphi dr &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^i \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\varphi dr = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^i 2\pi e^{-r^2} r dr \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^i \pi \frac{d}{dr} (-e^{-r^2}) dr = \lim_{i \rightarrow \infty} \pi (1 - e^{-i^2}) = \pi . \end{aligned}$$

Also ist f über \mathbb{R}^2 uneigentlich integrierbar mit Integral π . Wir wählen eine andere passende Ausschöpfung und erhalten mit den Folgerungen 3.4 und 4.3, dass

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{[-i, i]^2} f(x, y) dx dy = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-i}^i \int_{-i}^i e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dx dy \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\int_{-i}^i e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 . \end{aligned}$$

Also gilt zu guter Letzt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} .$$

5. Integration über Untermannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel lernen wir, über n -dimensionale Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^m$ zu integrieren. Dazu benötigen wir einen neuen Integrationsbegriff, denn wir hatten in den Übungen bereits gesehen, dass $\text{vol}^m(M) = 0$ falls $n < m$ (einen Spezialfall erhalten wir, indem wir $f = g$ in Proposition 2.5 setzen). Das m -dimensionale Integral über die Nullmenge M verschwindet, hilft uns also nicht weiter. Stattdessen werden wir einen n -dimensionalen Integrationsbegriff definieren. Zur Motivation beginnen wir mit Kurven- und Oberflächenintegralen und ihren Anwendungen. Hier gibt es je zwei Typen, die wir kurz beschreiben wollen.

Es sei also $\gamma \in C^1((a, b), \mathbb{R}^n)$ eine *parametrisierte Kurve*. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass γ injektiv ist. Um eine Funktion über die Kurve $C = \text{im } \gamma \subset \mathbb{R}^n$ zu integrieren, müssen wir genau wie in der Transformationsformel 4.2 die Volumenverzerrung durch γ korrigieren. Die absolute Jacobi-Determinante $|\det dF(x)|$ in Satz 4.2 beschreibt gerade das Volumen

des Bildes des Einheitswürfels unter $dF(x)$. Das Bild des Einheitsvektors unter $d\gamma(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\gamma}(t)$, und sein eindimensionales Volumen ist gerade die Länge $\|\dot{\gamma}(t)\|$. Wir definieren daher das Kurvenintegral einer Funktion $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$(1) \quad \int_C f(p) d\text{vol}^1(p) = \int_C f(p) dL(p) = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

sofern die rechte Seite existiert. Wir nennen dL das *Längenelement* oder auch *Bogenelement* der Kurve C . Wir sehen später, dass dieses Integral nicht von der gewählten Parametrisierung γ abhängt.

Wenn wir die konstante Funktion 1 integrieren, erhalten wir die *Bogenlänge*

$$L(C) = \text{vol}^1(C) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt .$$

Indem man C durch immer feinere Polygonzüge approximiert, kann man zeigen, dass $L(C)$ tatsächlich ein sinnvoller Längenbegriff ist. Wenn $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ für alle t gilt, nennen wir γ *nach Bogenlänge parametrisiert*, denn dann gilt

$$L(C) = \int_a^b dt = b - a .$$

Jede *reguläre Kurve*, das heißt jede Kurve $\gamma \in C^1((a, b), \mathbb{R}^n)$ mit

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt} \neq 0 \quad \text{für alle } t \in (a, b)$$

lässt sich nach Bogenlänge umparametrisieren.

Sei $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ nach Bogenlänge parametrisiert, dann definieren wir die von C bei $\gamma(t)$ durch

$$\kappa(\gamma(t)) = \|\ddot{\gamma}(t)\| = \left\| \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} \right\| \geq 0 ,$$

und die *Totalkrümmung* von C durch

$$\int_C \kappa(p) dL(p) = \int_a^b \|\ddot{\gamma}(t)\| dt .$$

Für nach Bogenlänge parametrisierte Kurven in der Ebene ($n = 2$) können wir eine *gerichtete Krümmung* definieren durch

$$\bar{\kappa}(\gamma(t)) = \det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)) = \det \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) & \ddot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) & \ddot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R} .$$

Ihr Vorzeichen ist positiv in „Linkskurven“ und negativ in „Rechtskurven“. Wenn $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ *einfach geschlossen* ist, das heißt, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ und $\dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b)$ gilt, und nicht notwendig injektiv, dann besagt der *Hopfsche Umlaufsatz*, dass

$$\bar{K}(C) = \int_C \bar{\kappa}(p) dL(p) \in 2\pi \mathbb{Z} .$$

Wenn γ injektiv ist, ist der Wert $\pm 2\pi$ je nach Umlaufrichtung. Für einfach geschlossene Kurven im Raum gilt immerhin die *Fenchelsche Ungleichung*

$$K(C) = \int_C \kappa(p) dL(p) \geq 2\pi .$$

Für das Kurvenintegral vom zweiten Type sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve und $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges *Vektorfeld*. Dann definieren wir

$$(2) \quad \int_C X(p) \cdot dL(p) = \int_a^b \langle X(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt$$

sofern die rechte Seite existiert. Wir nennen $\cdot dL$ das *tangentiale Längen-* oder auch *Bogenelement*, wobei \cdot und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ beide das Standardskalarprodukt bezeichnen. Dieses Integral ist unabhängig unter richtungserhaltenden Umparametrisierungen, das heißt, für $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ mit $\dot{\varphi}(s) > 0$ für alle $s \in [c, d]$ und $\delta = \gamma \circ \varphi$ gilt

$$\begin{aligned} \int_c^d \langle X(\delta(s)), \dot{\delta}(s) \rangle ds &= \int_c^d \langle X(\gamma(\varphi(s))), \dot{\gamma}(\varphi(s)) \rangle \dot{\varphi}(s) ds \\ &= \int_a^b \langle X(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt \end{aligned}$$

nach der eindimensionalen Substitutionsregel. Eine typische physikalische Anwendung ist die Berechnung der Energie, die man braucht, um ein Teilchen in einem Kraftfeld X längs eines gerichteten Weges C zu bewegen.

Dieses Kurvenintegral ist unabhängig unter stetigen Deformationen von γ , wenn X *geschlossen* ist, das heißt, wenn

$$\frac{\partial X_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j(x)}{\partial x_i} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

gilt. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn X ein *Potential* $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt, das heißt, wenn

$$X = \text{grad } v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial v}{\partial x_n} \end{pmatrix} = dv^t ;$$

das ist eine Konsequenz aus dem Satz von Schwarz. In diesem Fall folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

$$\int_C X(p) \cdot dL(p) = \int_a^b dv(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t)) dt = \int_a^b \frac{d(v \circ \gamma)(t)}{dt} dt = v(b) - v(a) .$$

Es sei jetzt $U \subset \mathbb{R}^2$ und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ eine *regulär parametrisierte Fläche*, das heißt, das totale Differential $dF(x): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist injektiv für alle $x \in U$. Außerdem sei F wieder injektiv mit Bild $M = \text{im } F$. In diesem Fall bildet $dF(x)$

das Einheitsquadrat auf das von den partiellen Ableitungen aufgespannte Parallelogramm ab. Dessen Fläche wird gegeben durch die Norm des Kreuzprodukts $\left\| \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right\|$. Für eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir daher

$$(3) \quad \int_M f(p) dA(p) = \int_M f(p) d\text{vol}^2(p) = \int_U (f \circ F)(x) \left\| \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right\| d^2x$$

sofern die rechte Seite existiert. Dabei heißt $dA = d\text{vol}^2$ das *Flächenelement*. Mit diesem Oberflächenintegral lassen sich zum Beispiel Fläche und verschiedene Totalkrümmungen von M definieren und berechnen.

Es sei wieder $X: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld, dann definieren wir das *normale Oberflächenintegral* durch

$$(4) \quad \int_M X(p) \cdot d\nu(p) = \int_U \left\langle X(F(x)), \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right\rangle d^2x$$

sofern die rechte Seite existiert. Das Spatprodukt $\langle X \circ F, \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \rangle$ sieht nur den Anteil von X , der senkrecht auf der Fläche M steht. Daher heißt $\cdot d\nu$ das *normale Flächenelement*. Dieses Integral ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen. Es sei X das Geschwindigkeitsfeld eines Flusses, dann gibt das normale Oberflächenintegral an, wieviel Volumen pro Zeit durch die Fläche M von der einen Seite zur anderen hindurchfließt.

Als nächstes betrachten wir den Spezialfall von Hyperflächen, das heißt, von n -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^{n+1} . Die folgende Proposition verallgemeinert das Kreuzprodukt zu einem Produkt von n Vektoren im \mathbb{R}^{n+1} .

5.1. Proposition. *Es sei $n \geq 0$, dann existiert eine eindeutige alternierende multilineare Abbildung*

$$\wedge: (\mathbb{R}^{n+1})^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{mit} \quad (v_1, \dots, v_n) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_n,$$

so dass für alle $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ gilt, dass

$$(1) \quad \langle v_1 \wedge \dots \wedge v_n, w \rangle = \det(w, v_1, \dots, v_n) \quad \text{für alle } w \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Darüber hinaus gilt

$$(2) \quad \langle v_1 \wedge \dots \wedge v_n, v_i \rangle = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n,$$

$$(3) \quad \|v_1 \wedge \dots \wedge v_n\|^2 = \det((\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j}).$$

Sei schließlich $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ und $u_j = \sum_{i=1}^n v_i b_{ij}$, dann gilt

$$(4) \quad u_1 \wedge \dots \wedge u_n = \det B \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_n.$$

Wir nennen $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ das *äußere Produkt* der Vektoren v_1, \dots, v_n . Für kleine n kann man es leicht bestimmen. Für $n = 1$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} u & x \\ v & y \end{pmatrix} = uy - vx = \left\langle \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle \quad \Longrightarrow \quad \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix},$$

außerdem gilt $\|\wedge v_1\| = \|v_1\|$. Für $n = 2$ gilt

$$\det(w, v_1, v_2) = \langle v_1 \times v_2, w \rangle \quad \Longrightarrow \quad v_1 \wedge v_2 = v_1 \times v_2.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite von (3) heißt die *Gramsche Determinante* der Vektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$. Hierbei darf $m \geq n$ beliebig groß sein. Schreibt man die Vektoren als Spalten in eine Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, dann wird die Gramsche Determinante also gegeben durch

$$(5) \quad \sqrt{\det(A^t A)} = \det^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}.$$

BEWEIS. Die Abbildung $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$w \mapsto \det(w, v_1, \dots, v_n)$$

ist linear, also existiert nach dem Lemma von Riesz ein Vektor $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$, so dass (1) gilt.

Wir erhalten eine explizite Formel für $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$, indem wir die Determinante $\det(w, v_1, \dots, v_n)$ nach der ersten Spalte w entwickeln. Insbesondere sind die Koordinaten von $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ Determinanten von $n \times n$ -Untermatrizen der $(n+1) \times n$ -Matrix aus den Koordinaten der Vektoren v_1, \dots, v_n , so dass die Abbildung \wedge multilinear und alternierend ist.

Für $w = v_i$ für $i = 1, \dots, n$ verschwindet die Determinante in (1), also gilt (2).

Sei w senkrecht auf v_1, \dots, v_n mit $\|w\| = 1$, und sei A die Matrix mit den Spalten w, v_1, \dots, v_n dann folgt (3) aus (1) und (2), da

$$\begin{aligned} \|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n\|^2 &= \langle w, v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle^2 = \det(A)^2 = \det(A^t A) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle v_n, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix} \\ &= \det((\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j}). \end{aligned}$$

Für alle $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ und A wie oben beschreibt $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ die Matrix mit den Spalten w, u_1, \dots, u_n . Somit folgt (4) aus (1), da

$$\begin{aligned} \langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_n, w \rangle &= \det \left(A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right) \\ &= \det A \cdot \det B = \langle \det B \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_n, w \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Es seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ Vektoren, und es sei

$$P = P(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i v_i \mid t_1, \dots, t_n \in [0, 1] \right\}$$

das von ihnen aufgespannte Parallelotop. Die Norm des äußeren Produktes (für $m = n + 1$) und die Wurzel der Gramschen Determinante (für $m \geq n$ beliebig) beschreiben das n -dimensionale Volumen

$$\text{vol}^n(P) = \|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n\| = \sqrt{\det((\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j})}.$$

Am einfachsten ist das einzusehen, indem man sich überlegt, dass die Gramsche Determinante genau wie das Volumen nur von den Längen der Vektoren v_i und den Winkeln zwischen ihnen abhängt, und dass für $m = n$ für die quadratische Matrix A aus den obigen Vektoren offensichtlich gilt

$$\sqrt{\det((\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j})} = \sqrt{\det(A^t A)} = \sqrt{\det(A)^2} = |\det A| = \text{vol}^n(P).$$

Als nächstes betrachten wir n -dimensionale Flächenstücke im \mathbb{R}^m .

5.2. Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine *Immersion* ist eine Abbildung $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit injektivem Differential $dF(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ für alle $x \in U$. Eine *Einbettung* ist eine Immersion $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, so dass $F: U \rightarrow \text{im } U$ ein Homöomorphismus ist, wobei $M = \text{im } U \subset \mathbb{R}^m$ die Unterraumtopologie trägt. In diesem Fall nennen wir das Paar (M, F) eine *parametrisierte Untermannigfaltigkeit* und F eine *Parametrisierung* von M .

Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $G: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Einbettung mit $\text{im } G = \text{im } F$, dann heißt der eindeutig bestimmte Diffeomorphismus $H: V \rightarrow U$ mit $G = F \circ H$ der *Parametrisierungswechsel* von F nach G .

Eine *n -dimensionale Untermannigfaltigkeit* ist eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^m$, so dass zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^m$ von p und eine Parametrisierung $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\text{im } F = W \cap M$ existiert.

In der Analysis II ist möglicherweise eine andere, aber äquivalente Definition von Untermannigfaltigkeiten eingeführt worden. Der Parametrisierungswechsel H in der obigen Definition existiert als Abbildung und ist eindeutig bestimmt, da F und G injektiv sind mit $\text{im } F = \text{im } G$. Mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen lässt sich zeigen, dass H differenzierbar und differenzierbar umkehrbar ist.

In der Transformationsformel 4.2 haben wir die zurückgeholte Funktion $f \circ F$ mit der Jacobi-Determinanten $\det dF$ multipliziert, um die Volumenverzerrung durch die Abbildung F zu kompensieren. Deshalb liegt es nahe, bei der Integration über eine Parametrisierung F mit der Wurzel der Gramschen Determinante der Ableitung zu multiplizieren, um die Volumenverzerrung durch F auszugleichen. Dazu setzen wir

$$(6) \quad g^F(x) = \det(dF(x)^t dF(x)).$$

5.3. Proposition. *Es seien $F: U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^m$ und $G: V \rightarrow M$ Parametrisierungen und $H: V \rightarrow U$ der zugehörige Parametrisierungswechsel mit $G = F \circ H$. Für alle Funktionen $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ und alle lokal Jordan-messbaren Teilmengen $A \subset V$ existiert das Integral*

$$\int_{H(A)} (f \circ F)(y) \sqrt{g^F(y)} d^n y$$

genau dann, wenn das Integral

$$\int_A (f \circ G)(x) \sqrt{g^G(x)} d^n x$$

existiert, und falls beide Integrale existieren, haben sie den gleichen Wert. Dabei fassen wir die Integrale als eigentliche Integrale auf, falls A Jordan-messbar ist mit $\bar{A} \subset V$, ansonsten als uneigentliche Integrale.

Die Bedingung an A für eigentliche Integrierbarkeit ist wieder äquivalent zur entsprechenden Bedingung an $H(A)$, denn wenn A Jordan-messbar ist, ist A beschränkt, also sind sowohl $\bar{A} \subset V$ als auch $\overline{H(A)} = H(\bar{A}) \subset U$ kompakt, und $H(A)$ ist nach Satz 4.2 ebenfalls Jordan-messbar.

BEWEIS. Wir wenden die Transformationsformel aus Satz 4.2 oder Folgerung 4.3 an. Dazu überprüfen wir zunächst mit Hilfe der Kettenregel, dass

$$\begin{aligned} \sqrt{g^G(x)} &= \sqrt{\det(dG(x)^t dG(x))} = \sqrt{\det(d(F \circ H)(x)^t d(F \circ H)(x))} \\ &= \sqrt{\det(dH(x)^t) \det(dF(H(x))^t \cdot dF(H(x))) \det(dH(x))} \\ &= |\det dH(x)| (\sqrt{g^F} \circ H)(x). \end{aligned}$$

Jetzt folgen alle obigen Behauptungen, da

$$\begin{aligned} \int_A (f \circ G)(x) \sqrt{g^G(x)} d^n x &= \int_A \left(((f \circ F) \cdot \sqrt{g^F}) \circ H \right)(x) \det dH(x) d^n x \\ &= \int_{H(A)} (f \circ F)(y) \sqrt{g^F(y)} d^n y. \quad \square \end{aligned}$$

Aufgrund dieses Resultats ist die folgende Definition sinnvoll.

5.4. Definition. Es sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Parametrisierung von $M = \text{im } F$, und es sei $A \subset U$. Eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *integrierbar* über $F(A) \subset M$, wenn A Jordan-messbar ist mit $\bar{A} \subset U$ und das folgende *Untermannigfaltigkeits-Integral* existiert:

$$\int_{F(A)} f(p) d \text{vol}^n(p) = \int_A (f \circ F)(x) \sqrt{g^F(x)} d^n x.$$

Wir nennen f *uneigentlich integrierbar* über $F(A)$ wenn A lokal Jordan-messbar ist und die obige rechte Seite als uneigentliches Integral existiert.

Anstelle von $d \text{vol}^n$ schreibt man gern auch dL , dA und dV , falls $n = 1, 2$ beziehungsweise 3 ist. Nach den Überlegungen nach Proposition 5.1 erhalten wir für $n = 1$ das Kurvenintegral (1), da

$$\|\dot{\gamma}\| = \sqrt{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle} = \sqrt{g^\gamma},$$

und für $n = 2$ und $m = 3$ das Oberflächenintegral (3), da

$$\left\| \frac{dF}{dx_1} \times \frac{dF}{dx_2} \right\| = \left\| \frac{dF}{dx_1} \wedge \frac{dF}{dx_2} \right\| = \sqrt{g^F}$$

nach Proposition 5.1 (3). Insbesondere folgt aus Proposition 5.3, dass diese Integrale von C beziehungsweise M abhängen, aber nicht von der konkreten Wahl einer Parametrisierung, wie oben behauptet.

Wenn $m = n$ ist, ist eine Einbettung gerade ein Diffeomorphismus, und es gilt $\sqrt{g^F} = |\det dF|$, das heißt, wir erhalten wieder genau den Integranden aus der Transformationsformel. Wenn $m = n + 1$ ist, gilt nach Proposition 5.1 (3), dass

$$\int_{F(A)} f(p) d \operatorname{vol}^n(p) = \int_A (f \circ F)(x) \left\| \frac{\partial F}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\| d^n x .$$

In manchen Situationen ist dieser Korrekturfaktor leichter zu handhaben.

5.5. Bemerkung. Wir haben bisher nur gezeigt, dass das Integral über Untermannigfaltigkeiten wohldefiniert ist. Um zu zeigen, dass die Definition auch sinnvoll ist, könnte man zum Beispiel die Untermannigfaltigkeit M durch kleine, flache Stückchen, etwa durch Simplizes, approximieren, deren Volumen man bereits kennt, und über die man f integrieren kann. Wenn man dabei vorsichtig genug vorgeht, erhält man im Grenzwert gerade das oben definierte Integral. Der Beweis ist für $n \geq 2$ schwieriger für die Bogenlänge ($n = 1$), für die Sie vielleicht bereits eine Herleitung gesehen haben.

5.6. Bemerkung. Um eine Funktion über eine ganze Untermannigfaltigkeit M zu integrieren, gibt es verschiedene Möglichkeiten.

- (1) Wenn es eine Parametrisierung $F: U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^m$ gibt, so dass die Menge $M \setminus F(U)$ eine endliche Vereinigung von Untermannigfaltigkeiten kleinerer Dimension ist, bildet $M \setminus F(U)$ in M eine Nullmenge. In diesem Fall gilt

$$\int_M f(p) d \operatorname{vol}^n(p) = \int_{F(U)} f(p) d \operatorname{vol}^n(p) = \int_U (f \circ F)(x) \sqrt{g^F(x)} d^n x .$$

- (2) Andernfalls nehmen wir an, dass M von endlich vielen Parametrisierungen $F_i: U_i \rightarrow M$ für $i = 1, \dots, k$ überdeckt wird, und wählen Jordan-messbare Teilmengen $A_i \subset \mathbb{R}^n$ mit $\bar{A}_i \subset U_i$, so dass

$$M = F(A_1) \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} F(A_k) .$$

Dann setzen wir

$$\int_M f(p) d \operatorname{vol}^n(p) = \sum_{i=1}^k \int_{A_i} (f \circ F_i)(x) \sqrt{g^{F_i}(x)} d^n x .$$

- (3) In der obigen Situation kann man allgemeiner auch die Funktion f als Summe $f = f_1 + \cdots + f_k$ von Funktionen f_i mit Träger $\operatorname{supp} f_i \subset F(U_i)$ schreiben (für (2) wähle $f_i = \mathbf{1}_{F(A_i)} f$). Dann gilt

$$\int_M f(p) d \operatorname{vol}^n(p) = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} (f_i \circ F_i)(x) \sqrt{g^{F_i}(x)} d^n x .$$

In (2) und (3) überprüft man mit Proposition 5.3, dass der Wert des Integrals nicht von der Wahl der Zerlegung von M beziehungsweise f abhängt. Insbesondere setzen wir

$$\text{vol}^n(M) = \int_M d \text{vol}^n(p).$$

Für das folgende Beispiel erinnern wir uns an die Γ -Funktion. Für $a > 0$ (sogar für alle $a \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(a) > 0$) ist sie definiert als

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt.$$

Partielle Integration liefert die Funktionalgleichung

$$\Gamma(a+1) = - \int_0^\infty t^a \frac{d}{dt} e^{-t} dt = a \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt - (t^a e^{-t})|_{t=0}^\infty = a \Gamma(a).$$

Für $a = 1$ erhalten wir den speziellen Wert

$$\Gamma(1) = - \int_0^\infty \frac{d}{dt} e^{-t} dt = -(e^{-t})|_{t=0}^\infty = 1.$$

Zusammen mit der Funktionalgleichung folgt durch vollständige Induktion, dass Γ die *Fakultät* interpoliert, genauer

$$(7) \quad \Gamma(n+1) = n! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit Beispiel 4.5 rechnen wir einen weiteren speziellen Wert durch Substitution $t = x^2$ aus, nämlich

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_0^\infty e^{-x^2} 2 dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Wieder mit vollständiger Induktion erhalten wir

$$(8) \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{2n-1}{2} = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{4^n n!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

5.7. Beispiel. Wir führen die Rechnungen aus Beispiel 4.5 jetzt im \mathbb{R}^{n+1} aus. Dazu sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Teilmenge und $\Phi: U \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sei eine Parametrisierung, mit injektivem Differential $d\Phi(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Wir nehmen wie in Bemerkung 5.6 (1) an, dass $S^n \setminus \text{im } \Phi$ eine endliche Vereinigung von Untermannigfaltigkeiten der Dimension $\leq n-1$ ist. Ein Beispiel lernen Sie in den Übungen kennen.

Dann ist die Abbildung

$$F: (0, \infty) \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{mit} \quad F(r, a) = r \Phi(a)$$

ein Diffeomorphismus auf ihr Bild, und

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \text{im } F = \{0\} \cup \{rx \in \mathbb{R}^{n+1} \mid r > 0 \text{ und } x \in S^n \setminus \Phi(U)\}$$

ist eine endliche Vereinigung von Untermannigfaltigkeiten der Dimension $\leq n$ und daher eine uneigentliche Jordan-Nullmenge.

Es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \Phi(x) \in S^n \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = r \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}.$$

Aus $\|\Phi(x)\|^2 = 1$ für alle $x \in U$ folgt

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial r} \right\|^2 = 1 \quad \text{und} \quad \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial r} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle = 0,$$

insbesondere zeigt $\frac{\partial F}{\partial r}$ in die gleiche Richtung wie $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}$. Aus Proposition 5.1 folgt

$$\begin{aligned} |\det dF(r, x)| &= \left| \det \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) \right| \\ &= \left| \left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, r \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge r \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \right\rangle \right| = r^n \cdot \sqrt{g^\Phi(x)}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen wie üblich das Sphärenvolumen mit $\omega_n = \text{vol}^n(S^n)$. Jetzt berechnen wir mit dem Satz 3.3 von Fubini und der Transformationsformel 4.2 wie in Beispiel 4.5, dass

$$\begin{aligned} \pi^{\frac{n+1}{2}} &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\|z\|^2} d^{n+1}z \\ &= \int_U \int_0^\infty \underbrace{e^{-\|F(r,x)\|^2}}_{=e^{-r^2}} \underbrace{|\det dF(r, x)|}_{=r^n \sqrt{g^\Phi(x)}} dr d^n x \\ &= \int_U \sqrt{g^\Phi(x)} d^n x \cdot \int_0^\infty r^n e^{-r^2} dr \\ &= \omega_n \cdot \int_0^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{n-1}{2}} e^{-t} dt = \frac{\omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir $r^2 = t$ substituiert. Mit (7), (8) folgt

$$\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \begin{cases} \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} & \text{falls } n \text{ ungerade, und} \\ \frac{2^{n+1}\pi^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)!}{n!} & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

Für $n = 0, 1, 2$ erhalten wir die vertrauten Werte

$$\omega_0 = \frac{2 \cdot 0!}{0!} = 2, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{0!} = 2\pi \quad \text{und} \quad \omega_2 = \frac{8\pi \cdot 1!}{2!} = 4\pi.$$

Da S^0 aus genau zwei Punkten besteht, ist $\omega_0 = 2$ sinnvoll.

6. Der Divergenzsatz von Gauß

In diesem Kapitel lernen wir den Divergenzsatz von Gauß kennen. Als erstes lernen wir die Divergenz eines Vektorfeldes kennen; sie beschreibt die Volumenänderung des zugehörigen Flusses. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung.

Wir erinnern uns an die Spur einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$, gegeben durch

$$(1) \quad \text{tr}(A) = \sum_i a_{ii} \in \mathbb{R}.$$

Mit Hilfe der Spur können wir die Ableitung der Determinante einer Familie invertierbarer Matrizen $A: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ beschreiben als

$$\frac{d}{dt} \det(A) = \operatorname{tr} \left(\frac{dA(t)}{dt} \cdot A^{-1} \right) \cdot \det(A) .$$

Speziell für den Fall $A(0) = E_n$ ist diese Formel leicht nachzurechnen: Seien b_1, \dots, b_n die Spalten von $B = \frac{dA}{dt}|_{t=0}$ und e_1, \dots, e_n die Spalten der Einheitsmatrix E_n , dann folgt aus der Multilinearität der Determinante, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det(A) &= \sum_{j=1}^n \det(e_1, \dots, e_{j-1}, b_j, e_{j+1}, \dots, e_n) \\ &= \sum_{j=1}^n b_{jj} = \operatorname{tr} \left(\frac{dA(t)}{dt} \Big|_{t=0} \cdot \underbrace{A(0)^{-1}}_{=E_n} \right) \cdot \underbrace{\det(A(0))}_{=1} . \end{aligned}$$

Im allgemeinen schreiben wir $A(t) = C(t) \cdot A(t_0)$, so dass $C(t_0) = E_n$, und erhalten die gleiche Formel. Indem wir noch mit dem Vorzeichen der Determinante multiplizieren, finden wir

$$(2) \quad \frac{d}{dt} |\det(A)| = \operatorname{tr} \left(\frac{dA(t)}{dt} \cdot A^{-1} \right) \cdot |\det(A)| .$$

6.1. Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und es sei $V: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Dann ist die *Divergenz* von V die Funktion

$$\operatorname{div} V = \operatorname{tr}(dV) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial V}{\partial x_i}, e_i \right\rangle : U \rightarrow \mathbb{R} .$$

6.2. Bemerkung. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\varepsilon > 0$. Wir betrachten eine C^1 -Abbildung $F: U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, die wir uns als einen *Fluss*, also als Bewegung einer Flüssigkeit oder eines Gases vorstellen. Dazu betrachten wir für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ die Abbildung

$$F_t: U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad F_t(x) = F(x, t)$$

und nehmen an, dass F_t für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Das *Geschwindigkeitsfeld* von F zur Zeit t ist ein *zeitabhängiges Vektorfeld* V mit $V_t(x): \operatorname{im}(F_t) \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass

$$(3) \quad \frac{\partial F_t(x)}{\partial t} = V_t(F_t(x)) .$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf wird F_t durch das Vektorfeld V_t und die Vorgabe von $F_0: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ bereits eindeutig festgelegt, wenn V_t wenigstens Lipschitz-stetig ist.

Sei jetzt $A \subset U$ kompakt und Jordan-messbar. Wir wollen herausfinden, wie sich das Volumen der Teilmenge $\operatorname{im}(F_t|_A)$ im Laufe der Zeit ändert. Aus der Transformationsformel 4.2, 4.3, Proposition 3.2, dem Satz von Schwarz aus

der Analysis und den Gleichungen (2), (3) folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \text{vol}^n(\text{im}(F_t|_A)) &= \frac{d}{dt} \int_A |\det dF_t(x)| d^n x = \int_A \frac{\partial}{\partial t} |\det dF_t(x)| d^n x \\
&= \int_A \text{tr} \left(\frac{\partial dF_t}{\partial t}(x) \cdot dF_t^{-1}(x) \right) |\det dF_t(x)| d^n x \\
&= \int_A \text{tr} \left(d \frac{\partial F_t}{\partial t}(x) \cdot dF_t^{-1}(x) \right) |\det dF_t(x)| d^n x \\
&= \int_A \text{tr}(d(V_t \circ F_t)(x) \cdot dF_t^{-1}(x)) |\det dF_t(x)| d^n x \\
&= \int_A \text{tr}(dV_t(F_t(x))) |\det dF_t(x)| d^n x \\
&= \int_{\text{im}(F_t|_A)} \text{tr}(dV_t(y)) d^n y = \int_{\text{im}(F_t(A))} (\text{div } V_t)(y) d^n y .
\end{aligned}$$

Somit misst die Divergenz von V_t genau die lokale Volumenänderung durch den Fluss F_t zum Vektorfeld V_t .

Eine *Hyperfläche* ist eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1, also beispielsweise eine $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Wenn wir von einer *orientierten Hyperfläche* sprechen, meinen wir eine Hyperfläche mit Parametrisierungen $F_i: U_i \rightarrow M$, so dass

$$M = \bigcup_i \text{im}(F_i) ,$$

und so, dass zu F_i, F_j mit $\emptyset \neq M_{ij} = \text{im } F_i \cap \text{im } F_j \subset M$ die zugehörige *Koordinatenwechselabbildung*

$$H_{ij}: F_j^{-1}(M_{ij}) \rightarrow F_i^{-1}(M_{ij}) \quad \text{mit} \quad F_i \circ H_{ij} = F_j|_{F_j^{-1}(M_{ij})}$$

orientierungserhaltend ist, das heißt, dass $\det dH_{ij} > 0$ auf dem gesamten Definitionsbereich.

$$\begin{array}{ccc}
& M_{ij} \subset M \subset \mathbb{R}^n & \\
F_j \nearrow & & \nwarrow F_i \\
\mathbb{R}^{n-1} \supset U_i \supset F_i^{-1}(M_{ij}) & \xleftarrow{H_{ij}} & F_j^{-1}(M_{ij}) \subset U_j \subset \mathbb{R}^{n-1}
\end{array}$$

Für eine solche orientierte Hyperfläche lassen wir dann auch nur diejenigen anderen Parametrisierungen $G: U \rightarrow M$ zu, für die die Koordinatenwechselabbildungen zu den obigen F_i allesamt orientierungserhaltend sind.

6.3. Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung einer orientierten Hyperfläche M und $A \subset U$ Jordan-messbar mit $\bar{A} \subset U$. Dann heißt ein Vektorfeld $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ *normal integrierbar über M* , wenn das folgende *normale Hyperflächenintegral* existiert:

$$\int_{F(A)} V(p) \cdot d\nu(p) = \int_A \det \left(V \circ F, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} \right) (x) d^{n-1} x .$$

Wir nennen $\cdot d\nu(p)$ das *normale Hyperflächenelement*. Die obige Definition verallgemeinert das normale Oberflächenintegral aus Abschnitt 5, Gleichung (4). In den Übungen haben Sie gesehen, dass das obige Integral unabhängig von der Parametrisierung F von M ist, sofern die Koordinatenwechselabbildung orientierungserhaltend ist. Daher ist die obige Definition auch nur für orientierte Hyperflächen sinnvoll. Wir können auch uneigentliche normale Hyperflächenintegrale definieren, und wir können diese Integrale wie in Bemerkung 5.6 skizziert auf kompliziertere orientierte Hyperflächen ausdehnen, für die eine Parametrisierung nicht ausreicht.

6.4. Bemerkung. Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge mit nicht-leerem Inneren $\overset{\circ}{B} \neq \emptyset$, so dass der Rand $M = \partial B$ eine C^1 -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist. Dann nennen wir B einen *Bereich mit glattem Rand*. Der Rand M ist dann automatisch eine Hyperfläche. Für jede Parametrisierung $F: U \rightarrow M$ steht der Vektor

$$\wedge dF(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial F(x)}{\partial x_n}$$

nach Proposition 5.1 (2) senkrecht auf dem sogenannten *Tangentialraum*

$$T_{F(x)}M = \text{im } dF(x) \subset \mathbb{R}^n .$$

Wir können M dadurch orientieren, dass wir nur Parametrisierungen zulassen, für die $\wedge dF(x)$ von B weg weist. In diesem Fall nennen wir

$$\nu(F(x)) = \frac{\wedge dF(x)}{\|\wedge dF(x)\|}$$

den *äußeren Einheitsnormalenvektor* im Punkt $p = F(x)$, und wir sagen, dass M die *Randorientierung* trägt. Diese Annahme wollen wir im folgenden immer machen.

Nach Proposition 5.1 (1) und (3) gilt

$$\det \left(w, \frac{\partial F(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F(x)}{\partial x_{n-1}} \right) = \langle w, \wedge dF(x) \rangle$$

und $\|\wedge dF(x)\| = \sqrt{g^F(x)}$,

also können wir das normale Hyperflächenintegral aus Definition 6.3 für $A \subset U$ wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} \int_{F(A)} V(p) \cdot d\nu(p) &= \int_A \langle V(F(x)), \wedge dF(x) \rangle d^n x \\ &= \int_A \langle V(F(x)), \nu_{F(x)} \rangle \sqrt{g^F(x)} d^n x = \int_{F(A)} \langle V(p), \nu(p) \rangle d \text{vol}^{n-1}(p) . \end{aligned}$$

Den Ausdruck rechts können wir wie in Bemerkung 5.6 auf ganz M ausdehnen.

Wie nehmen wieder an, dass B ein beschränkter Bereich mit glattem Rand $M = \partial B$ ist, und dass M die Randorientierung trägt. Es sei $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld mit Fluss F wie in Bemerkung 6.2 oben. Dann misst das normale Hyperflächenintegral

$$\int_M V(p) \cdot d\nu(p)$$

anschaulich gesprochen, wieviel Volumen der Fluss F pro Zeit vom Inneren von A nach außen transportiert. Dieses Volumen muss aber wegen „Erhaltung der Materie“ genau der Volumenausdehnung pro Zeit im Inneren von A entsprechen, und diese wird nach Bemerkung 6.2 durch das Riemann-Integral

$$\int_B (\operatorname{div} V)(x) d^n x$$

beschrieben. Also sollten diese zwei Integrale den gleichen Wert haben. Das ist die Motivation für den Divergenzatz von Gauß.

Wir beweisen den Divergenzatz zunächst für Normalbereiche, die wir hier rekursiv definieren.

6.5. Definition. Die einpunktige Menge $\mathbb{R}^0 = \{()\}$ ist ein 0-dimensionaler Normalbereich. Für $n \geq 1$ ist eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionaler *Normalbereich*, wenn ein $i \in \{1, \dots, n\}$, ein $(n-1)$ -dimensionaler Normalbereich B mit einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und zwei C^1 -Funktionen $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \leq g$ auf ganz B existieren, so dass

$$A = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in B \text{ und } f(x') \leq x_i \leq g(x') \right\}.$$

Ein eindimensionaler Normalbereich ist also einfach ein abgeschlossenes Intervall. Aus den Propositionen 2.5 und 2.6 folgt induktiv, dass Normalbereiche Jordan-messbar sind.

6.6. Bemerkung. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalbereich mit $i \in \{1, \dots, n\}$, $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und f, g wie in der Definition. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ wie oben. Dann gilt

$$(1) \quad \begin{aligned} \partial A = & \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x' \in B \text{ und } x_i = g(x') \} \\ & \cup \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x' \in B \text{ und } x_i = f(x') \} \\ & \cup \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x' \in \partial B \text{ und } f(x') \leq x_i \leq g(x') \}. \end{aligned}$$

Wir nennen diese drei Teilmengen den *oberen Rand*, den *unteren Rand* und die *Seiten* von A . Durch Induktion können wir zeigen, dass die Seiten selbst aus $2n - 2$ Untermannigaltigkeiten bestehen, der gesamte Rand also aus $2n$. Ein Normalbereich sieht also in etwa so aus wie ein deformierter Quader.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $i = n$. Wir betrachten als erstes den oberen Rand, den wir durch die Abbildung

$$F: B \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ g(x') \end{pmatrix}$$

parametrisieren. Wir erhalten

$$(2) \quad \wedge dF = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial g(x')}{\partial x_1} \end{pmatrix} \wedge \cdots \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g(x')}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g(x')}{\partial x_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial g(x')}{\partial x_{n-1}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor weist nach außen, da seine letzte Komponente positiv ist. Für den unteren Rand erhalten wir einen entsprechenden Vektor, aber mit umgekehrtem Vorzeichen.

Betrachten wir noch die Seiten von A . Sie sind enthalten in Zylindern der Form $C \times \mathbb{R}$, wobei $C \subset \partial B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine Hyperfläche ist. Es sei $\nu'(x') \in \mathbb{R}^{n-1}$ der äußere Normaleneinheitsvektor im Punkt $x' \in C$. Dann ist

$$(3) \quad \nu(x) = \begin{pmatrix} \nu'(x') \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

der äußere Normaleneinheitsvektor im Punkt $x \in \partial A \cap (C \times \mathbb{R})$.

6.7. Satz (Divergenz- von Gauß). *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionaler Normalbereich mit Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$, und es sei $V: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_A (\operatorname{div} V)(x) d^n x = \int_{\partial A} V(p) \cdot d\nu(p).$$

BEWEIS. Wir beweisen den Satz durch Induktion über n . Im Fall $n = 1$ sei $A = [a, b]$ und $V = f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Die Normaleneinheitsvektoren sind

$$\nu(b) = e_1 = (1) \quad \text{und} \quad \nu(a) = -e_1 = (-1) \in \mathbb{R}^1.$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\int_A (\operatorname{div} V)(x) d^1 x = \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) = \int_{\partial A} V(p) \cdot d\nu(p).$$

Wir setzen den Divergenzsatz für $(n-1)$ -dimensionale Normalbereiche voraus. Es sei A ein n -dimensionaler Normalbereich, und ohne Einschränkung sei wieder $i = 1$ in Definition 6.5. Wir definieren

$$V' = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}.$$

Seien B , f , g wie oben. Mit dem Satz 3.3 von Fubini, Proposition 3.2 und dem Hauptsatz berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_A (\operatorname{div} V)(x) d^n x &= \int_B \int_{f(x')}^{g(x')} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial V_n}{\partial x_n} \right) dx_n d^{n-1} x' \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \int_B \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{f(x')}^{g(x')} V_j(x) dx_n \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial g(x')}{\partial x_j} V_j \left(\begin{matrix} x' \\ g(x') \end{matrix} \right) + \frac{\partial f(x')}{\partial x_j} V_j \left(\begin{matrix} x' \\ f(x') \end{matrix} \right) \right) d^{n-1} x' \\
&\quad + \int_B \left(V_n \left(\begin{matrix} x' \\ g(x') \end{matrix} \right) - V_n \left(\begin{matrix} x' \\ f(x') \end{matrix} \right) \right) d^{n-1} x' \\
(*) \quad &= \int_B \operatorname{div} \left(\int_{f(x')}^{g(x')} V'(x) dx_n \right) d^{n-1} x' \\
&\quad + \int_B \left\langle V \left(\begin{matrix} x' \\ g(x') \end{matrix} \right), \begin{pmatrix} -\frac{\partial g(x')}{\partial x_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial g(x')}{\partial x_{n-1}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle d^{n-1} x' \\
&\quad + \int_B \left\langle V \left(\begin{matrix} x' \\ f(x') \end{matrix} \right), \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x')}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x')}{\partial x_{n-1}} \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle d^{n-1} x' .
\end{aligned}$$

Die beiden letzten Terme entsprechen nach Bemerkung 6.6 (2) gerade dem normalen Hyperflächenintegral von V über den oberen und unteren Rand von A .

Auf den ersten Term auf der rechten Seite oben können wir den Divergenz-
satz für $(n-1)$ -dimensionale Normalbereiche anwenden. Mit Bemerkung 6.6 (3)
erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_B \operatorname{div} \left(\int_{f(x')}^{g(x')} V'(x) dx_n \right) d^{n-1} x' &= \int_{\partial B} \left(\int_{f(x')}^{g(x')} V'(x) dx_n \right) \cdot d\nu'(x') \\
&= \int_{\partial A \cap (\partial B \times \mathbb{R})} V(x) \cdot d\nu(x) ,
\end{aligned}$$

und das ist gerade das normale Hyperflächenintegral von V über die Seiten
von A . Nach Bemerkung 6.6 (1) haben wir jetzt auf der rechten Seite von (*)
das normale Hyperflächenintegral von V über den gesamten Rand von A , und
der Satz ist bewiesen. \square

6.8. Bemerkung. Man kann den Divergenz-
satz auf eine größere Klasse von
Integrationsbereichen verallgemeinern.

- (1) Wenn man einen Bereich A durch Zerschneiden entlang von Hyper-
flächen in Normalbereiche (mit verschiedenen i) zerlegen kann, ad-
diert man die Gleichungen aus Satz 6.7 für alle Normalbereiche zu-
sammen. Dabei verschwinden die Beiträge der künstlich eingeführten

Schnittflächen, da die äußeren Normaleneinheitsvektoren von den angrenzenden Normalbereichen in entgegengesetzte Richtungen zeigen. Wenn nötig, kann A auch als Mengendifferenz von Vereinigungen von Normalbereichen darstellen.

- (2) Allgemeiner kann man A durch offene Quader Q so überdecken, dass alle Durchschnitt $A \cap \overline{Q}$ Normalbereiche sind. Da A kompakt ist, reichen endlich viele Quader aus. Anschließend schreibt man V als Summe von Vektorfeldern, die jeweils Träger in einem Quader haben. Dann kann wieder den Divergenzsatz auf jedes einzelne Vektorfeld anwenden und dann zusammenaddieren. Auf diese Weise beweist man den Divergenzsatz zum Beispiel für den Fall, dass ∂A eine glatte Untermannigfaltigkeit ist.
- (3) Wenn ∂A Ecken und Kanten hat, kann man ε -Umgebungen dieser Singularitäten aussparen und erhält mit (2) im Grenzübergang eine recht allgemeine Form des Divergenzsatzes.
- (4) Man kann den Divergenzsatz sogar auf n -dimensionale Untermannigfaltigkeiten M des \mathbb{R}^m mit Rand verallgemeinern, dazu muss man nur Parametrisierungen $F: U \rightarrow M$ angeben und das Vektorfeld V an M durch ein geeignetes Vektorfeld auf U ersetzen, auf das man dann Satz 6.7 anwenden kann. In dieser Form ist der Divergenzsatz äquivalent zum allgemeinen Satz von Stokes aus der Analysis III.

6.9. Beispiel. Wir betrachten das Vektorfeld $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$V \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \operatorname{div} V = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} = 1.$$

Es sei $A \subset \mathbb{R}^2$ eine Fläche, deren Rand durch eine parametrisierte Kurve

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

beschrieben wird, so dass A „links“ von γ liegt. Dann wird der äußere Normaleneinheitsvektor gegeben durch

$$\nu(\gamma(t)) = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix}.$$

Man kann zeigen, dass der Satz von Gauß für A gilt, und es folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}^2(A) &= \int_A (\operatorname{div} V)(x) d^2x = \int_{\partial A} V(p) \cdot d\nu(p) \\ &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \nu(\gamma(t)) \rangle \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b x(t) \dot{y}(t) dt. \end{aligned}$$

Also kann man den Flächeninhalt von A durch ein Kurvenintegral ausdrücken. Auf diesem Prinzip beruhen „Planimeter“, das sind mechanische Geräte, die den Inhalt einer Fläche ausrechnen, die man (zum Beispiel auf einer Landkarte) mit einem Stift umfährt.

6.10. Beispiel. Analog betrachten wir $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$V(x) = \frac{x}{n} \quad \text{und} \quad \operatorname{div} V(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial x_n}{\partial x_n} \right) = 1.$$

Wir bezeichnen mit Ω_n das Volumen der Vollkugel

$$D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \}$$

im \mathbb{R}^n vom Radius 1 mit Rand S^{n-1} . Der äußere Normaleneinheitsvektor an die S^{n-1} im Punkt $p \in S^{n-1}$ ist gerade

$$\nu(p) = p \in \mathbb{R}^n .$$

Wir berechnen mit Beispiel 5.7 also

$$\begin{aligned} \Omega_n &= \text{vol}(D^n) = \int_{D^n} (\text{div } V)(x) d^n x = \int_{S^{n-1}} V(p) \cdot d\nu(p) \\ &= \int_{S^{n-1}} \left\langle \frac{p}{n}, p \right\rangle d \text{vol}^{n-1}(p) = \frac{\omega_{n-1}}{n} \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n \Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} & \text{falls } n \text{ gerade, und} \\ \frac{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} (\frac{n-1}{2})!}{n!} & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases} \end{aligned}$$

Für $n = 1, 2, 3$ erhalten wir die vertrauten Werte

$$\Omega_1 = 2, \quad \Omega_2 = \pi \quad \text{und} \quad \Omega_3 = \frac{4\pi}{3} .$$

Literaturverzeichnis

- [1] K. Königsberger, Analysis 2, 2. erw. Aufl., Springer, Berlin, 1997
- [2] W. Walter, Analysis 2, 5. erw. Aufl., Springer, Berlin, 2002

Notation

\mathcal{W}_k^n , 2
 $\mathcal{M}_k(A), \mathcal{M}^k(A)$, 2
 $M_k(A), M^k(A)$, 2
 $m_k(A), m^k(A)$, 2
 $m_*(A), m^*(A)$, 3
 vol^n , 3
 $s_k(f), s^k(f)$, 7
 $\mathbf{1}_A$, 8
 $\int f(x) d^n x, \bar{\int} f(x) d^n x$, 8
 $\int_A f(x) d^n x$, 8
 B_r , 18
 dL , 29
 $L(C)$, 29
 $\bar{K}(C), K(C)$, 30
 $\cdot dL$, 30
grad, 30
 dA , 31
 $\cdot d\nu$, 31
 \wedge , 31
 g^F , 33
 $d\text{vol}^n$, 34
 dV , 34
 Γ , 36
 ω_n , 37
div, 38
 Ω_n , 45

Stichwortverzeichnis

- Abschluss, 6
- additiv, 1, 9
- Ausschöpfung, 18
- Bogenelement, 29
 - tangentiales, 30
- Bogenlänge, 29
- Cavalierisches Prinzip, **17**
- Determinante, 22
 - Gramsche, 32
 - Jacobi-, 22
- Dichte, 11
- differenzierbar, 21
- Divergenz, 38, 39
- Drehimpuls, 12
- Einbettung, 33
- Erwartungswert, 13
- Fakultät, 36
- Fläche
 - parametrisierte
 - regulär, 30
- Flächenelement, 31
 - normales, 31
- Fluss, 38
- Γ -Funktion, 36
- Gaußsche Glockenkurve, 28
- Hauptachse, 12
- Immersion, 33
- Indikatorfunktion, 8
- Inneres, 6
- Integral
 - Darboux-, 8
 - komponentenweises, 12
 - Kurven-, 29
 - Mehrfach-, 16
 - oberes, 8
 - Oberflächen, 31
 - normales, 31
 - Parameter-, 14
 - Riemann-, 8
 - über A , 8
 - uneigentliches, 18
 - unteres, 8
 - Untermannigfaltigkeits-, 34
- Integrand, 8
- Integrationsbereich, 8
- Integrationsvariable, 8
- integrierbar, 8
 - normal, 39
 - über A , 8
 - uneigentlich, 18
- Konvergenz
 - gleichmäßige, 8
- Korrelationskoeffizient, 13
- Kovarianz, 13
- Krümmung
 - Kurve, 29
- Kurve
 - einfach geschlossene, 29
 - parametrisierte, 28
 - nach Bogenlänge, 29
 - regulär, 29
- Längenelement, 29
 - tangentiales, 30
- linear, 9
- Linearisierung, 22
- Lipschitz-Konstante, 21
- Masse, 11
 - messbar, 3, 6
 - lokal, 18
 - monoton, 2, 8
- Normalbereich, 41
- normiert, 1, 9
- Nullmenge, 3
- Parallelotop, 33

- Parameter, 14
- Parametrisierung, 33
- Parametrisierungswechsel, 33
- Planimeter, 44
- Polarkoordinaten, 27
- positiv, 1
- Potential, 30
- Produkt
 - äußeres, 31
 - Kreuz-, 31
- Rand
 - topologischer, 6
- Satz
 - Fenchelsche Ungleichung, 30
 - Fubini, 15, 16
 - Haupt-
 - Differential- und Integralrechnung, 16, 42
 - Hopf, 29
 - Schwarz, 30
 - Transformationsformel, 24, 26
 - Umlauf-, 29
- Schwerpunkt, 12
- σ -additiv, 2
- stetig, 9
 - folgen-, 14
 - gleichmäßig, 11
 - Lipschitz-, 21
- Streuung, 13
- Totalkrümmung, 29
- Träger, 7
- Trägheitstensor, 12
- Transformationsformel, 24, 26
- translationsinvariant, 1
- Ungleichung
 - Fenchel, 30
- Untermannigfaltigkeit, 33
 - parametrisierte, 33
- Varianz, 13
- Vektorfeld, 30
 - geschlossen, 30
 - zeitabhängiges, 38
- Volumen, 3
 - äußeres, 3
 - inneres, 3
 - Sphäre, 37
 - uneigentliches, 18
- Volumenelement, 8
- Wahrscheinlichkeit, 13
- Zufallsvariable, 12