1. Übungsblatt zur Vorlesung „Mehrfachintegrale “ im Wintersemester 2012–2013 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.
Abgabe: Donnerstag, den 17.01.2013 in der Vorlesung.

Aufgabe 1:
Zeigen Sie:

(a) Die Vereinigung zweier Jordan-Nullmengen ist eine Jordan-Nullmenge

(b) Jede Teilmenge einer Jordan-Nullmenge ist eine Jordan-Nullmenge

Aufgabe 2:
Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Teilmengen. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\overline{A \cup B} \setminus (A \cup B)^\circ \subset (\overline{A} \setminus A^\circ) \cup (\overline{B} \setminus B^\circ)$;

(b) Wenn A und B Jordan-messbar sind, ist auch $A \cup B$ Jordan-messbar.

(c) In diesem Fall gilt

$$vol^n(A \cup B) = vol^n(A) + vol^n(B) - vol^n(A \cap B)$$

Aufgabe 3:
Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmenge. Zeigen Sie:
Alle Teilmengen $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \setminus N \subset B \subset A \cup N$ sind Jordan-messbar mit

$$vol^n(B) = vol^n(A)$$

Aufgabe 4:
Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar im Sinne der Analysis I/II mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} | x \in [a, b], y \in [f(x), g(x)]\}$$

Jordan-messbar ist mit

$$vol^2(A) = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

Anwesenheitsaufgaben

Bitte bereiten Sie die folgenden zwei Aufgaben über das Wochenende vor. Nehmen Sie bei Bedarf Ihr Analysis II-Skript zu Hilfe. Sie können es auch gerne zu den Übungen mitbringen.

(a) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $m \geq 1$ und $F : K \to \mathbb{R}^m$ stetig. Wir betrachten den Graph

$$graph(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m | x \in K, y = F(x)\}$$

Zeigen Sie, dass $graph(F)$ eine Jordan-Nullmenge ist. Hinweis: Vergewissern Sie sich anhand des Analysis II-Skriptes, dass F beschränkt und gleichmäßigstetig ist.

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein regulärer Wert von f, sodass $A = f^{-1}((-\infty, v])$ beschränkt ist. Zeigen Sie, dass A dann Jordan-messbar ist. Hinweis: Benutzen Sie den Satz vom regulären Wert beziehungsweise den Satz über implizite Funktionen, sowie die vorige Aufgabe