2. Übungsblatt zur Vorlesung „Mehrfachintegrale “ im Wintersemester 2012–2013 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Abgabe: Donnerstag, den 17.01.2013 in der Vorlesung.

Aufgabe 1:
Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Zeigen Sie:

$$s_k(\mathbf{1}_A) = m_k(A) \text{ und } s^k(\mathbf{1}_A) = m^k(A).$$

Geben Sie mit Hilfe der Funktion $\mathbf{1}_A$ ein Kriterium für die Jordan-Messbarkeit von A an und drücken Sie $\operatorname{vol}^n A$ als Riemann-Integral aus.

Aufgabe 2:
Analog zum Riemann-Integral betrachten wir zwei Operationen, die geeigneten Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ und Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Zahl in $\mathbb{R}$ zuordnen:

(a) Es seien $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ Punkte und $r_1, ..., r_N \in \mathbb{R}$, dann existieren *die gewichtete Summe über A*

$$\mathcal{F}_A(f) = \sum_{i=1}^{N} r_i(\mathbf{1}_A \cdot f)(x_i).$$

(b) Es sei $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ stetig und beschränkt, dann sei f *gewichtet integrierbar über* A mit

$$\mathcal{G}_A(f) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathbf{1}_A \cdot \rho \cdot f)(x) d^n x,$$

wenn das Integral existiert.

Zeigen Sie für a) *oder* b), dass alle Eigenschaften aus Proposition 2.3 gelten bis auf Normierung (5).

Aufgabe 3:
Zeigen Sie:

(a) Es sei f Riemann-integrierbar über $C \subset \mathbb{R}^n$ und $A \subset C$ sei Jordan-messbar, dann ist f auch integrierbar über A. *Hinweis: Benutzen Sie Proposition 1.6 und 2.6*

(b) Es sei f Riemann-integrierbar über Jordan-messbare Mengen A und B, dann ist f auch integrierbar über $A \cap B$ und $A \cup B$, und es gilt

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f$$

Aufgabe 4:
Es sei f beschränkt und $N \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-Nullmenge. Zeigen Sie:

(a) $\int_N f = 0$.

(b) $\int_A f = \int_B f$, falls $A \setminus N \subset B \subset A \cup N$.