3. Übungsblatt zur Vorlesung „Mehrfachintegrale “ im Wintersemester 2012–2013 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.
Abgabe: Donnerstag, den 31.01.2013 in der Vorlesung.

Aufgabe 1:
Berechnen Sie Masse, Schwerpunkt und Trägheitstensor (*siehe Bemerkung 2.7*) des Quaders

$$K = [-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c] \subset \mathbb{R}^3$$

mit konstanter Dichte $\rho(x) = 1$ für alle $x \in K$.
Hinweis: Begründen Sie zunächst, dass es ausreicht, für den Schwerpunkt eines der drei und für den Trägheitstensor zwei der neun einzelnen Integrale auszurechnen.

Aufgabe 2:
Es sei $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^{2k} & \text{falls } k \in \mathbb{N} \text{ mit } 2^{-k} < x \leq 2^{1-k} \text{ und } 2^{-k} < y \leq 2^{1-k} \\ -2^{2k+1} & \text{falls } k \in \mathbb{N} \text{ mit } 2^{-k} < x \leq 2^{1-k} \text{ und } 2^{-k-1} < y \leq 2^{-k} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Integrale existieren und berechnen Sie diese:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dx \right) dy \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dy \right) dx.$$

(b) Ist f Riemann-integrierbar über $[0, 1]^2$?

(c) Ist f uneigentlich Riemann-integrierbar über $[0, 1]^2$?

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie den Schwerpunkt des oberen Halbkreises

$$H = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

mit konstanter Dichte $\rho = 1$.
Hinweis: Sie dürfen voraussetzen, dass $\operatorname{vol}^2(H) = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 4:
Es sei $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar und für $r > 0$ und $h > 0$ sei

$$\begin{aligned} rA &= \{ (rx, ry) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in A \} \subset \mathbb{R}^2 \\ K &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z \leq h \text{ und } (x, y) \in zA \} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass rA und K Jordan-messbar sind mit

(a) $\operatorname{vol}^2(rA) = r^2 \operatorname{vol}^2 A$

(b) $\operatorname{vol}^3(K) = \frac{h^3}{3} \operatorname{vol}^2 A = \frac{h}{3} vol^2(hA)$