

## 4. Übungsblatt zur Vorlesung „Mehrfachintegrale“ im Wintersemester 2012–2013 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.  
Abgabe: Donnerstag, den 31.01.2013 in der Vorlesung.

### Aufgabe 1:

Es sei  $a > 0$ .

- (a) Bestimmen Sie  $c_a \in \mathbb{R}$  so, dass

$$c_a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = 1$$

- (b) Berechnen Sie die Varianz

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_a x^2 e^{-ax^2} dx$$

Für welchen Wert von  $a$  ist die Varianz genau 1?

*Hinweis:* Betrachten Sie auf  $\mathbb{R}^2$  die Funktion  $(x^2 + y^2)e^{-a(x^2+y^2)}$ .

### Aufgabe 2:

Betrachten Sie die Abbildung

$$F : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \phi, \psi) \mapsto (r \cos(\phi) \sin(\psi), r \sin(\phi) \sin(\psi), r \cos(\psi))$$

- (a) Bestimmen Sie das Bild im  $F$ .
- (b) Bestimmen Sie die Jacobi-Determinante  $|\det dF(r, \phi, \psi)|$ .
- (c) Zeigen Sie, dass  $F : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \text{im } F$  ein Diffeomorphismus ist. Geben Sie die Umkehrabbildung an.

### Aufgabe 3:

Für welche  $a \in \mathbb{R}$  existiert das uneigentliche Integral

$$\int_{B_R(0)} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{a}{2}} dx dy dz?$$

Berechnen Sie es gegebenenfalls mit Aufgabe 2.

### Aufgabe 4:

Bestimmen Sie bei konstanter Dichte 1 die Masse, den Schwerpunkt und den Trägheitstensor von  $B_R(0)$ . Benutzen Sie wieder die Koordinaten aus Aufgabe 2.