# 5. Übungsblatt zur Vorlesung „Mehrfachintegrale “ im Wintersemester 2012–2013 bei Prof. Dr. S. Goette

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.*
*Abgabe: Donnerstag, den 14.02.2013 in der Vorlesung.*

**Aufgabe 1:**
Es seien $0 < r < R$ gegeben. Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} &F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ &(\phi, \psi) \mapsto ((R - r\cos\psi)\cos\phi, (R - r\cos\phi)\sin\phi, r\sin\phi) \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie $M = \operatorname{im} F$.

(b) Bestimmen Sie $U \subset \mathbb{R}^2$ so, dass $F|_U$ eine Parametrisierung von $M$ liefert und $M \setminus F(U)$ eine endliche Vereinigung höchstens eindimensionaler Untermannigfaltigkeiten ist.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{vol}^2(M)$.

**Aufgabe 2:**
Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ und $G : V \to \mathbb{R}^{n+1}$ Parametrisierungen einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $H : V \to U$ ein Diffeomorphismus mit $\det(dH(x)) > 0$ für alle $x \in V$. Zeigen Sie: Für jede stetige Abbildung $X : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ gilt

$$\int_V \det(X \circ G, \frac{\partial G}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n})(x)\, d^n x = \int_U \det(X \circ F, \frac{\partial F}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y_n})(y) d^n y$$

**Aufgabe 3:**
Es sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Einheitssphäre und es sei $F : \mathbb{R}^n \to S^n$ die Abbildung, die einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ den zweiten Schnittpunkt der Geraden durch $(0, x_1, \dots, x_n)$ und $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ zuordnet. Zeigen Sie, dass $F$ eine Parametrisierung ist mit $S^n \setminus F(U) = \{(1, 0, \dots, 0)\}$ und geben Sie den Korrekturfaktor $\sqrt{g^F(x)}$ an.

**Aufgabe 4:**
Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine glatte regulär parametrisierte Kurve, $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ ein Diffeomorphismus und $\delta = \gamma \circ \varphi : [c, d] \to \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) Falls $n = 2$ und $\dot\varphi(s) \geq 0$, gilt

$$\frac{\det(\dot\delta, \ddot\delta)}{||\dot\delta||^3}(t) = \frac{\det(\dot\gamma, \ddot\gamma)}{||\dot\gamma||^3}(\varphi(t))$$

und falls $||\dot{\delta(t)}|| = 1$ stimmt dieser Ausdruck mit der gewichteten Krümmung $\bar\kappa(\delta(t))$ überein.

(b) Falls $n \geq 2$, gilt

$$\frac{\sqrt{||\dot{\delta}||^2||\ddot{\delta}||^2 - \langle \dot{\delta}, \ddot{\delta}\rangle^2}}{||\dot{\delta}||^3}(t) = \frac{\sqrt{||\dot{\gamma}||^2||\ddot{\gamma}||^2 - \langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}\rangle^2}}{||\dot{\gamma}||^3}(\phi(t))$$

und falls $||\dot{\delta(t)}|| = 1$ auf ganz $[c, d]$, stimmt dieser Ausdruck mit der Krümmung $\kappa(\delta(t))$ überein.

Leiten Sie daraus jeweils Ausdrücke für die Totalkrümmung $K(C)$ und $\bar{K}(C)$ für beliebig parametrisierte Kurven ab.