Mathematisches Institut
der Universität Freiburg

Eckerstr. 1
79104 Freiburg i. Br.
Büro: (0761) 203-5540

Prof. Dr. W. Soergel
Dr. G. Höhn

Übungen zur Topologie II

Wintersemester 2001/2002 **Blatt 1**

Hausaufgaben, Abgabe bis 24.10.01

Aufgabe 1:

Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ stelle man mengentheoretische Bedenken hintenan und betrachte die Kategorie $\mathcal{C}^\wedge$ mit Funktoren $\mathcal{C} \to \{\text{Mengen}\}$ als Objekten und natürlichen Transformationen als Morphismen. Man zeige, daß der kontravariante Funktor

$$\begin{array}{rcl} h : \mathcal{C} & \to & \mathcal{C}^\wedge \\ X & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \quad) \end{array}$$

volltreu ist, d.h. Isomorphismen auf allen Hom-Räumen induziert.

(Bemerkung: Jede Kategorie $\mathcal{C}$ besitzt also eine natürliche "Vervollständigung" $\mathcal{C}^\wedge$.)

Aufgabe 2:

Gegeben ein topologischer Raum X bezeichne $\tilde{S}X$ den Komplex

$$\ldots \to S_2X \to S_1X \to S_0X \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0 \to \ldots$$

mit ϵ der Augmentation. Die Homologie von $\tilde{S}X$ heißt die reduzierte Homologie von X und wird abgekürzt mit $\tilde{H}_qX = H_q(\tilde{S}X)$. Man berechne H_qX und $\tilde{H}_qX$ für X die disjunkte Vereinigung vo nn Bällen im $\mathbb{R}^N$.

Aufgabe 3:

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\Delta \in \mathcal{C}$ ein Objekt. Wir betrachten den Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Delta, \quad) : \mathcal{C} & \to & \{\text{Abelsche Gruppen}\} \\ X & \mapsto & \mathbb{Z}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Delta, X) \end{array}$$

der jedem $X \in \mathcal{C}$ die freie abelsche Gruppe über der Menge $\mathrm{Hom}_C(\Delta, X)$ zuordnet. Man zeige, daß wir für jeden weiteren Funktor $G : \mathcal{C} \to \{\text{Abelsche Gruppen}\}$ eine Bijektion erhalten

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Nat}(\mathbb{Z}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Delta, \quad), G) & \xrightarrow{\sim} & G(\Delta) \\ \tau & \mapsto & \tau_\Delta(\mathrm{id}_\Delta) \end{array}$$

Aufgabe 4:

Die Randoperatoren $\partial : S_qX \to S_{q-1}X$ sind natürliche Transformationen $S_q \to S_{q-1}$. Wie muß man $\mathcal{C}, \Delta, G$ und das Element von $G(\Delta)$ wählen, um sie durch den Formalismus aus der vorhergehenden Übung zu beschreiben?