Mathematisches Institut
der Universität Freiburg

Eckerstr. 1
79104 Freiburg i. Br.
Büro: (0761) 203-5540

Prof. Dr. W. Soergel
Dr. G. Höhn

Übungen zur Topologie II

Wintersemester 2001/2002 **Blatt 4**

Hausaufgaben, Abgabe bis 19.11.01

Aufgabe 1:

Sei M eine Mannigfaltigkeit und or ihre Orientierungsgarbe. Man zeige, daß die faserweise Addition or $\times$ or $\to$ or stetig ist.

Aufgabe 2:

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Umgebungen des Ursprungs und $g : A \xrightarrow{\sim} B$ ein Diffeomorphismus mit $g(0) = 0$. So kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(A, A-0) & \to & H_n(B, B-0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) & \to & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \end{array}$$

mit dem Vorzeichen der Funktionaldeterminante $\det(\mathrm{d}_0\, g)$ als unterer Horizontale. (Hinweis: Für Punkte $p \neq 0$ nahe am Ursprung gilt $\|g(p) - (\mathrm{d}_0\, g)(p)\| < \|(\mathrm{d}_0\, g)(p)\|$.)

Aufgabe 3:

Eine C^∞-Orientierung einer C^∞-Mannigfaltigkeit ist eine Vorschrift sgn, die jeder zusammenhängenden Karte (U, φ) ein Vorzeichen $\mathrm{sgn}(U, \varphi)$ zuordnet derart, daß die Funktionaldeterminante von Kartenwechseln zwischen zusammenhängenden Karten (U, φ) und (V, ψ) überall das Vorzeichen $\mathrm{sgn}(U, \varphi)\,\mathrm{sgn}(V, \psi)$ hat. Man konstruiere eine Bijektion zwischen den topologischen Orientierungen und den C^∞-Orientierungen einer gegebenen C^∞-Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 4:

Im $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Vereinigung X des Torus

$$T = \{(x, y, z) \mid (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = 1\}$$

mit der x-Achse. Man bestimme alle Homologiegruppen von X.