Mathematisches Institut
der Universität Freiburg

Eckerstr. 1
79104 Freiburg i. Br.
Büro: (0761) 203-5540

Prof. Dr. W. Soergel
Dr. G. Höhn

Übungen zur Topologie II

Wintersemester 2001/2002 **Blatt 7**

Hausaufgaben, Abgabe bis 10.12.01

Aufgabe 1:

Eine kurze exakte Sequenz $B \hookrightarrow E \twoheadrightarrow A$ von abelschen Gruppen (oder allgemeiner Moduln über einem gegebenen Ring) nennt man auch eine **Erweiterung** von A durch B. Eine zweite solche Erweiterung $B \hookrightarrow E' \twoheadrightarrow A$ heißt isomorph genau dann, wenn es einen Isomorphismus $E \xrightarrow{\sim} E'$ gibt, der das folgende Diagramm zum Kommutieren bringt:

$$\begin{array}{ccccc} B & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & A \\ \| & & \downarrow & & \| \\ B & \hookrightarrow & E' & \twoheadrightarrow & A \end{array}$$

Man zeige, daß wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Erweiterungen von } A \text{ durch } B, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}(A,B)$$

erhalten, indem wir jeder kurzen exakten Sequenz $B \hookrightarrow E \twoheadrightarrow A$ das Bild in $\operatorname{Ext}(A,B)$ der Identität auf A unter dem Randoperator der zugehörigen Ext-Sequenz zuordnen.

Hinweis: Gegeben ein Element $e \in \operatorname{Ext}(A,B)$ wähle man einen Repräsentanten $\tilde{e} : KA \to B$ und bilde durch pushout in die Mitte ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} KA & \hookrightarrow & \mathbb{Z}A & \twoheadrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ B & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & A \end{array}$$

Aufgabe 2:

Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist $f^* : H^*Y \to H^*X$ ein Ringhomomorphismus.

Aufgabe 3:

Gegeben eine dg-Gruppe (M,d) betrachten wir den Endomorphismenkomplex $\operatorname{End} M = \operatorname{Hom}(M,M)$ mit homogenen Komponenten $(\operatorname{Hom}(M,M))_i = \prod_q \operatorname{Hom}(M_q, M_{q-i})$ und Differential $\partial(f) = \partial \circ f - (-1)^{|f|} f \circ \partial$, wo wir $|f| = i$ schreiben falls gilt $f \in (\operatorname{Hom}(M,M))_i$ mit der Verknüpfung als Multiplikation ein dg-Ring. Man zeige: $\operatorname{End} M$ ist mit der Vernüpfung als Multiplikation ein dg-Ring.

Aufgabe 4:

Ist $f : X \to Y$ stetig, $b \in H^p$ und $z \in H_{p+q}X$, so gilt die Formel $f_*(f^*b \cap z) = b \cap (f_*z)$.

Sie finden alle Übungsblätter auch im Internet unter der Adresse
`http://sunpool.mathematik.uni-freiburg.de/home/algebra/TopologieIISeite.html`