

**Aufgabe 1** (*Umkehrabbildung*) (4 Punkte)

Es sei  $\Omega := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 \neq -1\}$  und die Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1 + x_1 + x_2 + x_3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie  $Df(x_1, x_2, x_3)$ .
- Zeigen Sie, dass  $f$  auf  $\Omega$  injektiv ist, bestimmen Sie  $f(\Omega)$  und geben Sie die Umkehrabbildung  $f^{-1} : f(\Omega) \rightarrow \Omega$  explizit an.
- Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  auf  $f(\Omega)$  differenzierbar ist und berechnen Sie ihre Ableitung.

**Aufgabe 2** (*Surjektivität und Injektivität*) (4 Punkte)

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Abbildung

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

- Man berechne die Jacobi-Matrix  $Df$  von  $f$  und, wo sie existiert, ihre Inverse. Man zeige, dass  $f$  surjektiv ist und dass jeder Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  genau zwei Urbildpunkte besitzt.
- $f$  bildet  $M = \overline{B_1(0)} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$  in sich ab, ist *lokal injektiv* auf  $M$  (d.h.,  $\forall x_0 \in M$ ,  $\exists \rho > 0 : f|_{B_\rho(x_0)}$  injektiv), aber  $f : M \rightarrow M$  ist nicht injektiv.

**Aufgabe 3** (*Diffeomorphismus*) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass durch

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

ein Diffeomorphismus  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow B_1(0)$  gegeben ist.

**Aufgabe 4** (*Kontraktion*) (4 Punkte)

Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow X$  kontraktiv bzgl. der jeweils angegebenen Funktion  $d$  sind:

- $n = 1$ ,  $X = [1, \infty)$ ,  $d(x, y) = |xy|$ ,  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ,
- $n = 2$ ,  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ ,  $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\sin x_1, \cos x_2)$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 10.7. bis 12:00.**