Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2017, Serie 11
Prof. Dr. G. Wang — 10.07.2017
Dr. J. Scheuer

Aufgabe 1 (*Legendretransformation*) (4 Punkte)
a) Sei $p > 1$. Bestimmen Sie die Legendretransformierte H von $L(x) = x^p/p$ auf $U = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ und die Legendretransformierte von H.
b) Sei $L : U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion auf $U \subset \mathbb{R}^2$, für welche die zugehörige Legendretransformation (Gradientenabbildung)

$$f = DL : (x, y) \to (\xi, \eta) \text{ mit } \xi = L_x(x, y), \eta = L_y(x, y)$$

einen Diffeomorphismus von U nach V liefert, und bezeichne $H \in C^2(V)$ die Legendretransformierte von L. Man zeige:
i) $\rho := L_{xx}L_{yy} - L_{xy}^2 = \frac{1}{H_{\xi\xi}H_{\eta\eta} - H_{\xi\eta}^2}, \quad L_{xx} = \rho H_{\eta\eta}, \quad L_{xy} = -\rho H_{\xi\eta}, \quad L_{yy} = \rho H_{\xi\xi}.$
ii) Durch die Legendretransformation wird die Minimalflächengleichung

$$(1 + L_y^2)L_{xx} - 2L_xL_yL_{xy} + (1 + L_x^2)L_{yy} = 0$$

in die lineare Gleichung $(1 + \xi^2)H_{\xi\xi} + 2\xi\eta H_{\xi\eta} + (1 + \eta^2)H_{\eta\eta} = 0$ transformeirt.

Aufgabe 2 (*implizite Funktion*) (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x, y, z) := z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1.$$

Man zeige, dass durch $f(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung U von $(x, y) = (1, 1)$ eine differenzierbare Funktion $z = g(x, y)$ mit $g(1, 1) = 1$ implizit definiert ist und berechne die partiellen Ableitungen von g im Punkt (1,1).

Aufgabe 3 (*Untermannigfaltigkeit*) (4 Punkte)
Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x, y, z) := x^2 + xy - y - z, \quad g(x, y, z) := 2x^2 + 3xy - 2y - 3z.$$

Man zeige, dass

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, und dass

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \varphi(t) = (t, t^2, t^3)$$

eine globale Parameterdarstellung von C ist.

Aufgabe 4 (*keine Untermannigfaltigkeit*) (4 Punkte)
Es sei $N : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2\}$. Man zeige: Für $a \in N$, $a \neq (0, 0)$, hat $T_a N$ die Dimension 1, dagegen hat $T_{(0,0)}N$ die Dimension 0. Man folgere, dass N keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 17.7. bis 12:00**.