Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2017, Serie 12
Prof. Dr. G. Wang — 17.07.2017
Dr. J. Scheuer

Aufgabe 1 (*Eindeutigkeit*) (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. Es gelte

$$f(-x, y) = -f(x, y) \text{ für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Man beweise: Ist $r > 0$, so geht jede Lösung $\varphi : [-r, r] \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ bei Spiegelung an der y-Achse in sich über.

Aufgabe 2 (*Picard-Lindelöf*) (4 Punkte)
Mit Hilfe des Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahrens berechne man die Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_1 \end{cases}$$

mit der Anfangsbedingung $\varphi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige und $g : J \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Für die Differentialgleichung

$$x' = f(t)g(x), \quad (t, x) \in I \times J,$$

beweise man:
a) Sei $t_0 \in I$ und $x_0 \in J$ mit $g(x_0) = 0$. Dann ist die Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) := x_0$ für alle $t \in I$ die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung mit $\varphi(t_0) = x_0$.
b) Sei $\varphi : I_1 \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung auf einem Intervall $I_1 \subset I$. Gilt $g(\varphi(t_1)) \neq 0$ für ein $t_1 \in I_1$, so ist $g(\varphi(t)) \neq 0$ für alle $t \in I_1$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen, d.h. die Lösung durch einen beliebigen Punkt (t_0, x_0) des Definitionsbereichs.
a) $x' = e^x \cos t$,
b) $x' = \frac{1}{x}\sqrt{1 - x^2}$, $(0 < x < 1)$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 24.7. bis 12:00**.