Aufgabe 1 (c) in Serie 5.

Die kritische Punkte von

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - \sin(x^2 + y^2)$$

sind $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = n\pi, n = 0, 1, 2, \cdots\}$. Die Ursprung $(0, 0)$ ist ein minimaler Punkt.

Wir wollen zeigen, dass alle andere keine extremale Punkte sind. Betrachte nun $(x_0, y_0) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = n\pi\}$ mit $n \geq 1$ und die Funktion $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$,

$$\phi(t) = f(x_0 + t, y_0 + t) = (x_0 + t)^2 + (y_0 + t)^2 - \sin((x_0 + t)^2 + (y_0 + t)^2)$$

mit $0 < \varepsilon < 1$. Die Ablietung of ϕ ist

$$\phi'(t) = 2\{1 - \cos((x_0 + t)^2 + (y_0 + t)^2))\}(x_0 + t + y_0 + t).$$

Es ist klar, dass $\phi'(t) \geq 0$ auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ und $\phi'(t) > 0$ für alle $t \neq 0$. Daraus ist ϕ strikt monoton welchsend auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ und 0 ist kein extremaler Punkt. Es folgt, dass (x_0, y_0) kein extremaler Punkt von f ist.

Bemerkung: Die Betrachtung von $\phi = f(tx, ty)$ ist nicht gut.