
Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

- (a) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ eine C^1 -Kurve. Definieren Sie den Begriff der Bogenlänge von f .
- (b) Berechnen Sie die Bogenlänge von

$$t \in [0, \pi] \mapsto f(t) = (\cos t, \sin t).$$

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

- (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld und $\gamma \in C^1([a, b], \Omega)$ ein C^1 -Kurve in Ω . Definieren Sie den Begriff des Kurvenintegrals von F längs γ .
- (b) Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $F(x, y) = (x, y)^\top$ ein Vektorfeld, und $t \in [0, 1] \mapsto (t, e^t)$. Berechnen Sie das Kurvenintegral von F längs γ .

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

- (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Wann heißt eine Vektorfeld $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ Gradientenfeld?
- (b) Geben Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür an, dass ein Vektorfeld F ein Gradientenfeld ist.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)

- (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Wann heißt eine Vektorfeld $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ Gradientenfeld?
- (b) Ist das Vektorfeld $F(x, y) = (y, -x)$ ein Gradientenfeld?