Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 02, Serie 3
Prof. Dr. E. Kuwert — 2. Mai 2002

Aufgabe 1 *(Fourierreihe von e^{ax})*
Ermitteln Sie die Fourierkoeffizienten der 2π-periodischen Funktion f mit

$$f(x) = e^{ax} \text{ für } x \in [-\pi, \pi), \qquad \text{wobei } a > 0.$$

Berechnen Sie dann den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 + a^2)$ anhand der Parsevalschen Gleichung.

Aufgabe 2 *(Periodische Funktionen)*
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und periodisch mit Periode $2L > 0$.

(a) Verifizieren Sie $\int_{a-L}^{a+L} f = \int_{-L}^{L} f$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.

(b) Wie lauten die Eigenfunktionen, die Formeln für die Fourierkoeffizienten und die Fourierentwicklung für $2L$-periodische Funktionen f?

Aufgabe 3 *(Approximationssatz von Weierstraß für trigonometrische Polynome)*
Zeigen Sie, dass jede stetige, 2π-periodische Funktion f gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximiert werden kann.
Hinweis: Für viele stetige Funktionen f leistet die Fourierreihe von f das Gewünschte, aber nicht für alle.

Aufgabe 4 *(Poincaré-Ungleichung)*
Beweisen Sie mittels Fourierentwicklung für eine 2π-periodische Funktion $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\int_{-\pi}^{\pi} f = 0$ die Ungleichung

$$\|f\|_2 \leq \|f'\|_2, \qquad \text{wobei } \|f\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \right)^{1/2}.$$

Wann tritt Gleichheit ein?

Aufgabe 5 *(Periodische Funktionen)*
Konstruieren Sie eine 2π-periodische, unendlich oft differenzierbare Funktion, die kein trigonometrisches Polynom ist (mit Nachweis).

Es sind vier der fünf Aufgaben zu bearbeiten. Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 7.5.2002 bis 9:15.