Aufgabe 1 *(Stetige Bilder kompakter Mengen)*
Seien X, Y metrische Räume, $K \subset X$ kompakt und $f : K \to Y$ stetig. Folgern Sie, dass dann auch $f(K) \subset Y$ kompakt ist.

Aufgabe 2 *(Zur Vertauschung der partiellen Ableitungen)*
Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die zweiten partiellen Ableitungen $\partial_1\partial_2 f(0,0)$ und $\partial_2\partial_1 f(0,0)$ existieren, aber nicht gleich sind.

Aufgabe 3 *(Wärmeleitungsgleichung)*
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R},\ u(x,t) = (4\pi t)^{-n/2}\, e^{-|x|^2/4t}$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \Delta u$ ist.

Aufgabe 4 *(Ausgleichsgerade)*
Die Ausgleichgerade $y = ax + b$ zu den Messdaten $\{(x_k, y_k) : k = 1, \ldots, N\}$ ist dadurch bestimmt, dass der Punkt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ die Quadratsumme

$$f(a,b) := \sum_{k=1}^{N} (ax_k + b - y_k)^2$$

minimiert. Überlegen Sie, ob es einen solchen Punkt gibt und wenn ja, berechnen Sie ihn.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 30.4.2007 bis 9:15.