
Aufgabe 1 *(Kritische Punkte)*
Bestimmen Sie die kritischen Punkte der folgenden Funktionen f. Bestimmen Sie in den nicht degenerierten Fällen den Index. Zeichnen Sie jeweils die Höhenlinien $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$ (zumindest in der Nähe der kritischen Punkte).

(a) $f(x,y) = x - x^2 - y^2$.

(b) $f(x,y) = xy(x-1)$.

(c) $f(x,y) = \sin(xy)$.

Aufgabe 2 *(120°-Winkel)*
Seien a, b, c die Ecken eines Dreiecks in $\mathbb{R}^2$. Betrachten Sie die Abstandssumme

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c|.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Funktion f ist strikt konvex.

(b) Es gibt genau einen Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^2} f(y)$.

(c) Ist x nicht eine der Ecken a, b, c, so bilden die Strecken xa, xb, xc miteinander Winkel von jeweils $2\pi/3$.

Aufgabe 3 *(Nichtdegenerierte kritische Punkte)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ein kritischer Punkt $x \in \Omega$ der Funktion $f \in C^2(\Omega)$ heißt bekanntlich nichtdegeneriert, wenn die Hessematrix

$$D^2 f(x) = \big(\partial_i \partial_j f(x)\big)_{1 \le i,j \le n}$$

invertierbar ist. Zeigen Sie, dass x dann ein isolierter kritischer Punkt ist: es gibt eine offene Umgebung $B_\varepsilon(x)$, in der keine weiteren kritischen Punkte von f liegen.

Aufgabe 4 *(Binomialreihe)*
Rechnen Sie nach, dass die Taylorreihe der Funktion

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = (1+x)^\alpha \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R},$$

die Binomialreihe $B_\alpha(x) = \sum_{k=0}^\infty \binom{\alpha}{k} x^k$ ist. Zeigen Sie für $x \in [0,1)$ mittels Abschätzung des Restglieds, dass die Reihe in der Tat gegen $f(x)$ konvergiert.
Hinweis: Nach Analysis 1, Kapitel 5, Beispiel 3.4 ist die Aussage auch für $x \in (-1,0)$ richtig, die Restgliedabschätzung ist aber schwieriger.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe Montag, 21.5.2007 bis 9:15.