Aufgabe 1 *(Zur Cauchyschen Integralformel)*
Sei $z \in D_1(0) \subset \mathbb{C}$ und $\varepsilon \in (0, 1 - |z|)$. Konstruieren Sie eine Homotopie zwischen den positiv durchlaufenen Kreisen $\partial D_1(0)$ und $\partial D_\varepsilon(z)$, deren Bild in $\overline{D_1(0)} \backslash D_\varepsilon(0)$ enthalten ist.

Aufgabe 2 *(Pullback von 1-Formen)*
Sei $\phi : \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $\phi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$, die Polarkoordinatenabbildung. Berechnen Sie jeweils die zurückgeholte Form $\phi^*\omega$:

(a) $\omega = g\big(\sqrt{x^2+y^2}\big) \dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ für $g : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$.

(b) $\omega = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$.

(c) $\omega = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$.

Aufgabe 3 *(einfacher Zusammenhang)*
Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ für $n \geq 3$ einfach zusammenhängend ist. Folgern Sie damit, dass S^{n-1} einfach zusammenhängend ist für alle $n \geq 3$.
Hinweis: Sie können voraussetzen, dass (stetige) Wege homotop zu Polygonzügen sind. Zeigen Sie zuerst, dass jeder Polygonzug in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ in einem Gebiet der Gestalt $\mathbb{R}^n \setminus \{tv : t \geq 0\}$ mit einem geeigneten Vektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ liegt.

Aufgabe 4 *(komplexer Logarithmus)*
Schreiben Sie Real- und Imaginärteil des Kurvenintegrals

$$\int_\gamma f(z)\,dz \qquad \text{mit } f(z) = \frac{1}{z}$$

als Integrale über geeignete reelle 1-Formen. Zeigen Sie, dass der Imaginärteil zwar geschlossen, aber nicht exakt ist, der Realteil hingegen exakt. Geben Sie auf $\mathbb{C} \backslash \{(x, 0) : x \leq 0\}$ eine komplexe Stammfunktion von $f(z)$ an.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe Montag, 25.6.2007 bis 9:15.