Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 09, Blatt 1
Prof. Dr. E. Eberlein — 30. April 2009
PD Dr. M. Simon

Aufgabe 1 (*Berechnung des Integrals mit Riemannschen Summen*)
Berechnen Sie (mit Riemannschen Summen) die Integrale

(a) $\int_1^{10} x^2 dx$.

(b) $\int_1^a \log(x) dx$, wobei $a > 1$.

Hinweis : Verwenden Sie die Unterteilungspunkte $x_k = a^{k/N}$ *für* $k = 0, 1, \ldots, N$.

Aufgabe 2 (*Integral als Funktion der oberen Grenze*)
Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(y) dy$$

Lipschitz stetig ist.
Erinnerung: $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz stetig, falls ein $c > 0$ existiert mit $|F(x) - F(y)| \leq c|x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$.

Aufgabe 3 (*Integralnorm*)
Beweisen Sie, dass durch $\| \cdot \|$: $C^0([a, b]) \to \mathbb{R}$,

$$\| f \| = \int_a^b |f(s)| ds$$

eine Norm definiert ist (hier ist $C^0([a, b])$ die Menge der stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$).

Aufgabe 4 (*Riemann-integrierbar oder nicht?*)
Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Ist f Riemann-integrierbar?

Abgabe: Montag, 4. Mai 2009 (bis 12 uhr).