Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 09, Blatt 2
Prof. Dr. E. Eberlein — 4. Mai 2009
PD Dr. M. Simon

Aufgabe 1 (*zur Deltafunktion*)
Sei $g \in C^0(\mathbb{R})$ nichtnegativ mit $g(x) = 0$ für alle $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ und $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$. Für $\epsilon > 0$ ist

$$\delta_\epsilon : C^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \delta_\epsilon(f) := \int_{-\infty}^{\infty} g_\epsilon(x) f(x) dx,$$

wobei $g_\epsilon(x) := (1/\epsilon) g(x/\epsilon)$. Zeigen Sie: $\lim_{\epsilon \searrow 0} \delta_\epsilon(f) = f(0)$.

Aufgabe 2 (*Anwendung des Fundamentalsatzes*)
Sei $a > 0$. Berechnen Sie

$$\int_0^a x e^x dx.$$

Aufgabe 3 (*Riemann-integrierbarkeit auf Teilintervallen*)
Sei $a < b < c$ und $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist genau dann integrierbar, wenn $\mathrm{Rest}_{[a,b]} f$ und $\mathrm{Rest}_{[b,c]} f$ integrierbare Funktionen sind. Es gilt dann

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Dieser Satz wurde bereits für Treppenfunktionen bewiesen. Zeigen Sie den allgemeinen Fall.

Aufgabe 4 (*Gamma-Funktion*)
Die Gamma-Funktion $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ hat die Integraldarstellung

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha - 1} dt.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Gamma(\alpha)$ für alle $\alpha > 0$ wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie mit partieller Integration, dass

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

für alle $\alpha > 0$.

(c) Zeigen Sie mit Induktion, dass $\Gamma(n) = (n - 1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Abgabe: Montag, 11. Mai 2009 (bis 12 Uhr).