

Aufgabe 1 (*Verschiedene Integrale*)

Seien $0 < a < b < \infty$ und $1 < c < d < \infty$. Berechnen Sie

$$(i) \int_c^d \frac{1}{x \log x} dx,$$

$$(ii) \int_a^b \frac{\log x}{x} dx,$$

und

$$(iii) \int_a^\infty \frac{1}{x^2} dx.$$

Aufgabe 2 (*Eine Variante des Hauptsatzes*)

Sei $a \in \mathbb{R}$, $f \in C^0(\mathbb{R})$, und $g : \mathbb{R} \rightarrow (a, \infty)$ eine differenzierbare Funktion. Sei $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$\Phi(s) = \int_a^{g(s)} f(t) dt.$$

Begründen Sie die Differenzierbarkeit von Φ und berechnen Sie die Ableitung.

Aufgabe 3 (*Gleichmäßige Konvergenz*)

Seien $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx^2}.$$

Beantworten Sie (mit Nachweis) folgende Fragen. Konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$? Konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$?

Aufgabe 4 (*Gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen*)

Seien $f_n : I = [0, 100] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) := n \log(1 + x/n) - x,$$

und sei $g_n = f'_n$ die Ableitung von f_n . Beantworten Sie (mit Nachweis) folgende Fragen.

(a) Konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$?

(b) Konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$?

(c) Konvergiert $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}$?

(d) Konvergiert $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}$?

Abgabe: Montag, 18. Mai 2009 (bis 12 Uhr).