Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 09, Blatt 4
Prof. Dr. E. Eberlein — 25. Mai 2009
PD Dr. M. Simon

Aufgabe 1(*Lipschitz Funktionen*)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < C < \infty$ und sei

$$Lip_C([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ \mid \ |f(x) - f(y)| \leq C|x-y| \text{ für alle } x, y \in [a,b]\}.$$

Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Funktionfolge mit $f_n \in Lip_C([a,b])$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R} \implies f \in Lip_C([a,b])$.
Ist $Lip_C([a,b])$ ein Untervektorraum von $B([a,b])$?
Erinnerung: $B([a,b]) := \{\ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt } \}$.

Aufgabe 2 (*Konvergenz und Integrale*)
$f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{falls } 0 \leq x \leq (1/n) \\ 2n - n^2 x, & \text{falls } (1/n) < x < (2/n) \\ 0, & \text{falls } (2/n) \leq x \leq 2. \end{cases}$$

In der Vorlesung wurde schon gezeigt, dass $(f_n)_{n\geq 1}$ punktweise gegen $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ konvergiert, wobei $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,2]$. Beantworten Sie (mit Nachweis) die folgende Frage. Ist $\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$?

Aufgabe 3(*Konvergenzradius einer Potenzreihe*)
Bestimmen Sie (mit Nachweis) den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$(i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\ln n)^n x^n$$

$$(ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^n (x-2)^n$$

$$(iii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1/n) x^n$$

Aufgabe 4(*Am Rand des Konvergenzintervalls*)
Konstruieren Sie Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, so dass f und g den Konvergenzradius 1 haben, f gleichmäßig und absolut in $[-1,1]$ konvergiert und g nicht punktweise in $x = 1$ konvergiert.
Hinweis : Betrachten Sie die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ bzw. die Harmonische Reihe und benutzen Sie das Majorantenkriterium.

Abgabe: Montag, 25. Mai 2009 (bis 12 Uhr).