Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 09, Blatt 5
Prof. Dr. E. Eberlein — 25. Mai 2009
PD Dr. M. Simon

Aufgabe 1 (*Binomische Reihe I*)
Für $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ sei

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!}$$

und $\binom{\alpha}{0} := 1$. Sei $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := (1+x)^\alpha$, T_f die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt 0 und $h(x) := \frac{T_f(x)}{f(x)}$ für $|x| < 1$. Man zeige:

(a) Für $|x| < 1$ gilt

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

und $T_f(x)$ konvergiert für alle $|x| < 1$

(b) $h :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und $h'(x) = 0$ für alle $x \in]-1, 1[$.

(c) $\mathrm{h}(0) = 1$.

Schließen Sie, dass $T_f(x) = f(x)$ für alle $|x| < 1$.

Aufgabe 2 (*Binomische Reihe II*)
Für $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei $\binom{\alpha}{k}$ wie in Aufgabe 1 definiert. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k$$

in $[0, 1]$ gleichmäßig konvergiert.
Hinweis : Abelscher Grenzwertsatz.

Aufgabe 3 (*Integration einer Taylorreihe*)
Sei $x > 0$. Man zeige, dass

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Aufgabe 4 (*Der Folgenraum l^∞*)
Sei M die Menge $M := \{(x_n)_{n \geq 1} \ | \ \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty\}$.
Definiere $d : M \times M \to \mathbb{R}$ durch

$$d((x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}) := \sup\{ \ |x_i - y_i| \ | \ i \in \mathbb{N} \ \}.$$

Zeigen Sie, dass d eine Metrik ist.
Bemerkung : Man bezeichnet M üblicherweise mit l^∞.

Abgabe: Montag, 8. Juni 2009 (bis 12 Uhr).