Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 09, Blatt 6
Prof. Dr. E. Eberlein — 8. Juni 2009
PD Dr. M. Simon

Aufgabe 1 (*Stetigkeit und abgeschlossenen Mengen*)
Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: $f : X \to Y$ ist stetig genau dann, wenn das Urbild $f^{-1}(G)$ jeder abgeschlossene $G \subset Y$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 2 ($\mathbb{S}^1$ *ist kompakt*)
Sei $\mathbb{R}^2$ mit der Standard Metrik $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ versehen und sei $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Man zeige, dass $\mathbb{S}^1$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 3 (*Die Operatornorm*)
Seien $(X, \| \cdot \|_X)$, $(Y, \| \cdot \|_Y)$ normierte Vektorräume und sei
$M := \{A : X \to Y \mid A \text{ linear und stetig } \}$. Man zeige, dass $(M, \| \cdot \|_M)$ mit $\| A \|_M := \sup\{\| A(x) \|_Y \mid x \in X, \| x \|_X \leq 1\}$ selbst ein normierter Vektorraum ist, wobei $(aA + bB)(x) := aA(x) + bB(x)$ für alle $A, B \in M$, $x \in X$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (*Eine stetige Funktion von l^2 nach l^2*)
Gegeben sei eine Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ mit $\sup\{ |s_i| \mid i \in \mathbb{N}\} < \infty$. Sei l^2 der Folgenraum

$$l^2 := \{(x_n)_{n\geq 1} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$$

und sei $\| \cdot \|_{l^2} : l^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\| (x_n)_{n\geq 1} \|_{l^2} := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}.$$

Betrachte die Abbildung $T : l^2 \to l^2$ die durch $T((x_n)_{n\geq 1}) := (s_n x_n)_{n\geq 1}$ definiert ist. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- $(l^2, \| \cdot \|_{l^2})$ ist ein normierter Vektorraum, wobei hier $a(x_n)_{n\geq 1} + b(y_n)_{n\geq 1} := (ax_n + by_n)_{n\geq 1}$ für alle $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \in M$ und $a, b \in \mathbb{R}$ ist.
- Die Abbildung $T : l^2 \to l^2$ ist stetig und $\| T \| = \sup\{ |s_i| \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Bemerkung: Die Norm einer stetigen linearen Abbildung zwischen zwei normierten Vektorräumen wurde in Aufgabe 3 und in der Vorlesung definiert.

Abgabe: Montag, 15. Juni 2009 (bis 12 Uhr).