Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 09, Blatt 7
Prof. Dr. E. Eberlein — 15. Juni 2009
PD Dr. M. Simon

Aufgabe 1 (*Abgeschlossene Hülle einer Algebra*)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie die folgende Aussage: ist $A \subset C(X)$ eine Algebra, dann ist auch die abgeschlossene Hülle $\bar{A}$ eine Algebra.

Aufgabe 2 (*Trigonometrische Polynome*)
Sei A die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)),$$

wobei die Koeffizienten reelle Zahlen sind. Zeigen Sie, dass A eine Algebra in $C(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 3 (*Eine Anwendung von Stone-Weierstraß*)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge mit der induzierten Metrik $d(x, y) :=\| x - y \|_{\mathbb{R}^n}$ für $x, y \in K$ versehen. Sei $P(K) := \{f : K \to \mathbb{R} \ | \ f = Rest_K g, \ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist ein Polynom $\}$. Man zeige, dass $P(K)$ dicht in $C(K)$ ist.
Bemerkung: Für eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist $Rest_K g : K \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $Rest_K g(p) = g(p)$ für alle $p \in K$.

Aufgabe 4 (*Gleichgradige Stetigkeit und punktweise Konvergenz*)
Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum.
Eine Teilmenge $\Lambda \subset C(X)$ heißt *gleichgradig gleichmässig stetig*, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $f \in \Lambda$ und alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$.
Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$, die punktweise gegen eine Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ konvergiert, und sei $\Lambda := \{f_n : X \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ *gleichgradig gleichmässig stetig*. Zeigen Sie, dass $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $g : X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie zusätzlich, dass $g : X \to \mathbb{R}$ *gleichmäßig stetig* ist.

Abgabe: Montag, 22. Juni 2009 (bis 12 Uhr).