Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 09, Blatt 8
Prof. Dr. E. Eberlein — 24. Juni 2009
PD Dr. M. Simon

Aufgabe 1 (*Offenen Mengen und Rand*)
Zeigen Sie: Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes ist genau dann offen, wenn $A \cap \partial A = \emptyset$ und genau dann abgeschlossen, wenn $\partial A \subset A$.

Aufgabe 2 (*Wellengleichung*)
Zeigen Sie, dass für $f, g \in C^2(\mathbb{R}), c > 0$ und $k \in \mathbb{R}^n$ mit $c^2 = \| k \|^2_{\mathbb{R}^n}$ die Funktion $u : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$$u(x,t) := f(\langle k, x\rangle - ct) + g(\langle k, x\rangle + ct)$$

($t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$) eine Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \Delta u(x,t)$$

für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist, wobei $\Delta u(x,t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t)$, und $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ für $a, b \in \mathbb{R}^n$.
Bemerkung: $C^2(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f$ *zwei mal differenzierbar ist, und* $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig ist* $\}$

Aufgabe 3 (*Zur Vertauschung der partiellen Ableitungen*)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existieren, aber nicht gleich sind.

Aufgabe 4 (*Stetige partiellen Ableitungen*)
Zeigen Sie, dass die ersten partiellen Ableitungen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

existieren und stetig sind.

Abgabe: Montag, 29. Juni 2009 (bis 12 Uhr).