
Aufgabe 1 (*Produktregel*)
Seien $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an der Stelle $a \in U$ total differenzierbar. Beweisen Sie die Produktregel

$$D(f \cdot g)(x) = f(a)Dg(a) + g(a)Df(a).$$

Aufgabe 2 (*Jacobi-Matrix der Inversen*)
Sei $U := \mathbb{R} \times]0, \pi[\subset \mathbb{R}^2$ und $f : U \to f(U) \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

(a) Bestimmen Sie $f(U)$ und berechnen Sie die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(U) \to U$.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $Df(x, y)$ und $D(f^{-1})(u, v)$, und zeigen Sie durch Nachrechnen, dass $(Df(x, y))^{-1} = D(f^{-1})(u, v)$ für $(u, v) = f(x, y)$

Bemerkung und Hinweis: Hier ist $\pi := 2 \inf\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ und } \cos(x) = 0\}$*. Es gilt* $\sin(x) > 0$ *für alle* $x \in]0, \pi[$.

Aufgabe 3 (*Kugelkoordinaten*)
Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(r, \phi, \theta) := (r \cos\phi \sin\theta, r \sin\phi \sin\theta, r \cos\theta)$. Berechenen Sie die Jacobi-Matrix von F und ihre Determinante.

Aufgabe 4(*Fortsetzbar und total differenzierbar*)
Sei $n \geq 2$. Sei $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ total differenzierbar, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(0) = 0$ und es gilt $\| Df(x) \|_{\mathbb{R}^n} \leq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ (hier ist $Df(x)$ die Jacobi-Matrix von f in x). Zeigen Sie, dass eine Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert, die total differenzierbar ist mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Abgabe: Montag, 6. Juli 2009 (bis 12 Uhr).