Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 09, Blatt 10
Prof. Dr. E. Eberlein — 6. Juli 2009
PD Dr. M. Simon

Aufgabe 1 (*Ableitung der p-Normen*)
Untersuchen Sie auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie den Gradienten (falls existent):

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad f(x):=\|\, x\,\|_p:=\Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p}\ \text{mit}\ p\in[1,\infty).$$

Aufgabe 2 (*Schwerpunkt*)
Seien $k\in\mathbb{N}$, $a^1,a^2,\dots,a^k\in\mathbb{R}^n$, $m_1,\dots,m_k\in\mathbb{R}$ mit $m_1,\dots,m_k>0$. Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,

$$f(x):=\sum_{i=1}^k m_i\,\|\, x-a^i\,\|^2_{\mathbb{R}^n},$$

wobei $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ der euklidische Norm ist. Zeigen Sie, dass es genau ein $x_0\in\mathbb{R}^n$ gibt mit $f(x_0)=\inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$.

Aufgabe 3 (*Differenzierbarkeit und Integration*)
Seien $U,V\subset\mathbb{R}$ offen und $[0,1]\subset U$. Es sei $f:U\times V\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Definiere $g:V\to\mathbb{R}$ durch

$$g(t):=\int_0^1 f(x,t)dx.$$

Zeigen Sie , dass g differenzierbar ist mit

$$g'(t)=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx,$$

und dass $g':V\to\mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 4 (*Stetigkeit und Richtungsableitungen*)
$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

- (a) Ist f im Nullpunkt stetig?
- (b) Für welche Richtungen existiert im Nullpunkt die Richtungsableitung?

Fragstunde zur Klausur AnaII:
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/dgreb/teaching.html

Abgabe: Montag, 13. Juli 2009 (bis 12 Uhr). Dieses Blatt ist das letzte Blatt.