Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 09, Blatt 10
Prof. Dr. E. Eberlein — 6. Juli 2009
PD Dr. M. Simon

Aufgabe 1 (*Ableitung der p-Normen*)
Untersuchen Sie auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie den Gradienten (falls existent):

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) :=\| x \|_p := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \Big)^{1/p} \text{ mit } p \in [1, \infty).$$

Aufgabe 2 (*Schwerpunkt*)
Seien $k \in \mathbb{N}$, $a^1, a^2, \dots, a^k \in \mathbb{R}^n$, $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{R}$ mit $m_1, \dots, m_k > 0$. Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \sum_{i=1}^k m_i \| x - a^i \|^2_{\mathbb{R}^n},$$

wobei $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^n}$ der euklidische Norm ist. Zeigen Sie, dass es genau ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $f(x_0) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

Aufgabe 3 (*Differenzierbarkeit und Integration*)
Seien $U, V \subset \mathbb{R}$ offen und $[0,1] \subset U$. Es sei $f : U \times V \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Definiere $g : V \to \mathbb{R}$ durch

$$g(t) := \int_0^1 f(x,t) dx.$$

Zeigen Sie , dass g differenzierbar ist mit

$$g'(t) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) dx,$$

und dass $g' : V \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 4 (*Stetigkeit und Richtungsableitungen*)
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- (a) Ist f im Nullpunkt stetig?
- (b) Für welche Richtungen existiert im Nullpunkt die Richtungsableitung?

Fragstunde zur Klausur AnaII: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/dgreb/teaching.html

Abgabe: Montag, 13. Juli 2009 (bis 12 Uhr). Dieses Blatt ist das letzte Blatt.