Übungsaufgaben zur Analysis II
Prof. Dr. E. Eberlein
PD Dr. M. Simon

SS 09, Blatt 11: Bonus Blatt
13. Juli 2009

Aufgabe 1 (*Kritische Punkte I*)
Bestimmen Sie die kritische Punkte der folgenden Funktionen f. Entscheiden Sie, ob es sich um lokale Maxima/Minima handelt.

(a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=(x+1)(y-2)$.

(b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x-x^2-y^2$.

(c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sin(xy)$.

Aufgabe 2 (*Globale Maxima/Minima*)
Sei $D:=\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\ \mid x^2+y^2<1\}$, $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2+y^2$.

(a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

(b) Berechnen Sie $\{(z,w)\in D\mid f(z,w)=\inf\{\ f(x,y)\mid (x,y)\in D\}\}$.

(c) Berechnen Sie $\{(z,w)\in D\mid f(z,w)=\sup\{\ f(x,y)\mid (x,y)\in D\}\}$.

Aufgabe 3 (*Kritische Punkte II*)
Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=xe^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Bestimmen Sie die kritische Punkte von f. Entscheiden Sie, ob es sich um lokale Maxima/Minima handelt.

Aufgabe 4*(*Nichtdegenerierte kritische Punkte*)
Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Ein kritischer Punkt $x_0\in\Omega$ der Funktion $f\in C^2(\Omega)$ heißt *nichtdegeneriert*, wenn die Hessematrix

$$(D_iD_jf(x_0))_{1\le i,j\le n}$$

invertierbar ist. Zeigen Sie, dass ein solcher Punkt isoliert ist, d.h. es gibt eine offene Umgebung $U(x_0)\subset\Omega$ von x_0, in der keine weiteren kritischen Punkte von f liegen. *Hinweis: Argument durch Widerspruch* Abgabe: Montag, 20. Juli 2009 (bis 12 Uhr):

Dieses Blatt ist freiwillig. Erzielte Punkte sind Bonuspunkte.