Übungsaufgaben zur Analysis II | SS 09, Blatt 11: Bonus Blatt
Prof. Dr. E. Eberlein | 13. Juli 2009
PD Dr. M. Simon

Aufgabe 1 (*Kritische Punkte I*)
Bestimmen Sie die kritische Punkte der folgenden Funktionen f. Entscheiden Sie, ob es sich um lokale Maxima/Minima handelt.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x + 1)(y - 2)$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - x^2 - y^2$.

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(xy)$.

Aufgabe 2 (*Globale Maxima/Minima*)
Sei $D := \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

(a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

(b) Berechnen Sie $\{(z, w) \in D \mid f(z, w) = \inf\{\ f(x, y) \mid (x, y) \in D\}\}$.

(c) Berechnen Sie $\{(z, w) \in D \mid f(z, w) = \sup\{\ f(x, y) \mid (x, y) \in D\}\}$.

Aufgabe 3 (*Kritische Punkte II*)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Bestimmen Sie die kritische Punkte von f. Entscheiden Sie, ob es sich um lokale Maxima/Minima handelt.

Aufgabe 4*(*Nichtdegenerierte kritische Punkte*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ein kritischer Punkt $x_0 \in \Omega$ der Funktion $f \in C^2(\Omega)$ heißt *nichtdegeneriert*, wenn die Hessematrix

$$(D_i D_j f(x_0))_{1 \le i,j \le n}$$

invertierbar ist. Zeigen Sie, dass ein solcher Punkt isoliert ist, d.h. es gibt eine offene Umgebung $U(x_0) \subset \Omega$ von x_0, in der keine weiteren kritischen Punkte von f liegen. *Hinweis: Argument durch Widerspruch* Abgabe: Montag, 20. Juli 2009 (bis 12 Uhr):

Dieses Blatt ist freiwillig. Erzielte Punkte sind Bonuspunkte.