
Aufgabe 1 *(Ringe)*

(a) Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{R}$ ein Ring über Y. Zeigen Sie, dass

$$f^{-1}(\mathcal{R}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{R}\}$$

ein Ring über X ist.

(b) Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{A}$ ein Ring über X. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

ein Ring über Y ist.

Aufgabe 2 *(Eine Abstandsfunktion)*
Sei $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{A} \subset 2^X$. Wir definieren

$$\mathrm{d}\,(A, B) := \mu(A \triangle B) \quad \text{für } A, B \in \mathcal{A},$$

wobei $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ die symmetrische Differenz von A und B bezeichnet.

(a) $\mathrm{d}\,(\cdot, \cdot)$ ist nichtnegativ, symmetrisch und erfüllt die Dreiecksungleichung.

(b) $A \sim B \Leftrightarrow \mathrm{d}\,(A, B) = 0$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{A}$.

(c) Auf der Quotientenmenge $\mathcal{A}/\sim$ wird durch $\mathrm{d}\,(\cdot, \cdot)$ eine Metrik induziert.

Aufgabe 3 *(Quadrierbare Mengen)*
Beschränkte Teilmengen von Koordinaten-Hyperebenen im $\mathbb{R}^n$ sind quadrierbar und haben Jordanschen Inhalt Null.
Hinweis: Eine Koordinaten-Hyperebene des $\mathbb{R}^n$ ist eine zu einer der Koordinatenachsen des $\mathbb{R}^n$ orthogonale $(n-1)$-dimensionale Hyperebene.

Aufgabe 4 *(Jordaninhalt)*
Vollziehen Sie den Beweis von Satz 1.5 des Vorlesungsskripts nach und vermerken Sie dies auf Ihrem Lösungsblatt.
Bemerkung: Sie müssen den im Vorlesungsskript angegebenen Beweis nicht abschreiben, Sie sollen diesen verstehen und in Ihrer Übungsgruppe vorrechnen können.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Freitag, dem 02.11.2007, bis 9.15 Uhr.