Aufgabe 1 *(Integration von Produktfunktionen)*
Seien α und β σ-endliche äußere Maße auf X bzw. Y und $f \in L^1(\alpha)$, $g \in L^1(\beta)$. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $F(x,y) = f(x)\,g(y)$, in $L^1(\alpha \times \beta)$ liegt und es gilt

$$\int_{X\times Y} F\,d(\alpha\times\beta) \;=\; \int_X f\,d\alpha \int_Y g\,d\beta.$$

Aufgabe 2 *(Zum Cavalierischen Prinzip)*
Seien $E_1 = ([0,1] \times ([0,1]\backslash S)) \cup ([1,2] \times S) \subset \mathbb{R}^2$ mit $S \subset [0,1]$ nicht $\mathcal{L}^1$-messbar und $E_2 = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

(a) Die y-Schnitte von E_1, E_2 und $E_1 \cup E_2$ sind $\mathcal{L}^1$-messbar für alle $y \in \mathbb{R}$.

(b) Die Funktionen f_{E_1}, f_{E_2} sind $\mathcal{L}^1$-messbar, nicht aber die Funktion $f_{E_1\cup E_2}$.

Aufgabe 3 *(Fubini-Anwendungen)*

(a) Sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$. Berechnen Sie

$$\int_A y\sqrt{x}\,d\mathcal{L}^2(x,y).$$

(b) Sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$. Berechnen Sie

$$\int_B \frac{y}{x}\,e^x\,d\mathcal{L}^2(x,y).$$

Aufgabe 4 *(Adjungierter Differentialoperator)*
Gegeben sei ein Differentialoperator

$$Lu \;=\; \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\,\partial^2_{ij}u + \sum_{i=1}^n b_i\,\partial_i u + cu \quad \text{für } u \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$$

mit Koeffizientenfunktionen $a_{ij}, b_i, c \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq i,j \leq n$.

(a) Bestimmen Sie einen Differentialoperator L^* desselben Typs, so dass gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Lu)\,v\,d\mathcal{L}^n \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} u\,(L^*v)\,d\mathcal{L}^n \quad \text{für alle } u,v \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n).$$

(b) Sind die Koeffizientenfunktionen von L^* eindeutig bestimmt?

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Freitag, dem 18.01.2008, bis 10.15 Uhr.